

MECA0003-2 Mécanique Rationnelle

Théorèmes généraux et mouvement du solide

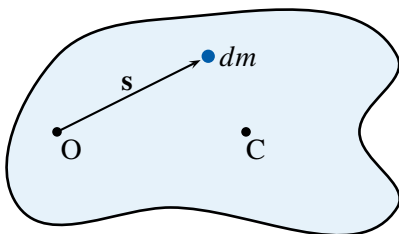
Retour sur le Th. C	2
J_C et théorème C	5
Théorèmes généraux	7
Description	8
ω ?	9
TH II _C	10
TH III _C	11
mg	13
Forces de liaison	14
Contact	15
Glissement	16
Pivotement	18
Forces de contact	19
Frottement	21
Puissance	25
Liaisons	26

Théorème C

Chacune des résultantes, calculée dans le système d'axes de centre O est égale à la même résultante, calculée dans le système d'axes parallèles de centre C augmentée de la résultante correspondante du centre d'inertie considéré comme un point matériel affecté de la masse totale du système et soumis à la résultante des forces.

- $\mathbf{Q}_O = m\mathbf{c} + \mathbf{Q}_C$
- $\mathbf{N}_O = m\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{N}_C$
- $\mathbf{H}_O = m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C$
- $T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C$
- $\mathbf{M}_O = \mathbf{c} \wedge \mathbf{G} + \mathbf{M}_C$
- $\mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \mathcal{P}_C$

J_C et théorème C



Quid si le solide tourne autour d'un de ses points O ?

$$\mathbf{H}_O = \int \mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} dm$$

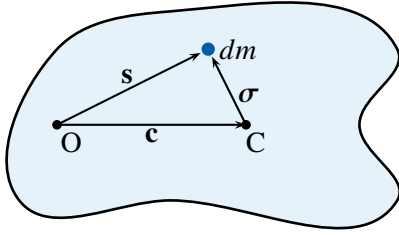
$$T_O = \frac{1}{2} \int \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 dm$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\delta \mathbf{s}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}_O = \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad T_O = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_O \cdot \boldsymbol{\omega}$$

avec $\mathbf{J}_O = \int \|\mathbf{s}\|^2 \mathbf{I} - \mathbf{s}\mathbf{s} dm$

J_C et théorème C



$$J_O = \int \|s\|^2 \mathbf{I} - s s \, dm$$

$$J_C = \int \|\sigma\|^2 \mathbf{I} - \sigma \sigma \, dm$$

$$s = c + \sigma$$

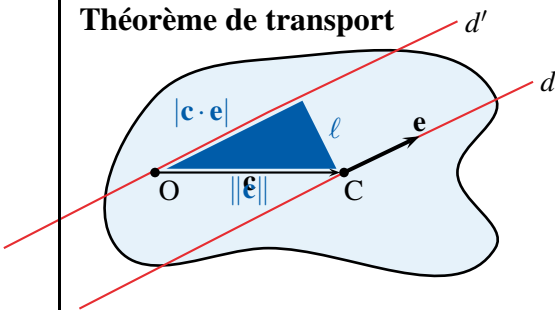
$$J_O = \int (\|s\|^2 \mathbf{I} - s s) \, dm$$

$$= \int [\|c + \sigma\|^2 \mathbf{I} - (c + \sigma)(c + \sigma)] \, dm$$

$$= \int [\|c\|^2 + \|\sigma\|^2 + 2c \cdot \sigma] \mathbf{I} - (cc + c\sigma + \sigma c + \sigma\sigma) \, dm$$

$$= m[\|c\|^2 \mathbf{I} - cc] + J_C \quad \text{car } \int \sigma \, dm = \mathbf{0}$$

Théorème de transport



$$J_O = m[\|c\|^2 \mathbf{I} - cc] + J_C$$

$$J_{d'} = \mathbf{e} \cdot J_O \cdot \mathbf{e}, \quad J_d = \mathbf{e} \cdot J_C \cdot \mathbf{e}$$

$$J_{d'} = \mathbf{e} \cdot J_O \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot [m[\|c\|^2 \mathbf{I} - cc] + J_C] \cdot \mathbf{e}$$

$$= m[\|c\|^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})^2] + \mathbf{e} \cdot J_C \cdot \mathbf{e}$$

$$= m[\|c\|^2 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{e})^2] + J_d$$

$$= m\ell^2 + J_d$$

Description du mouvement

- Mouvement du centre d'inertie (ou d'un autre point de référence)

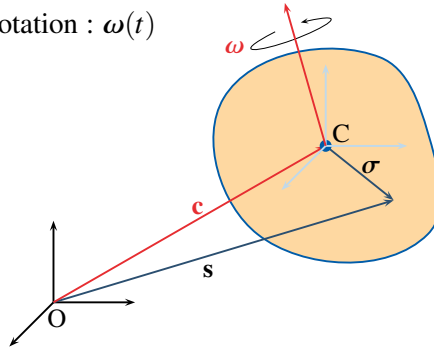
⇒ 3 degrés de liberté de translation : $\mathbf{c}(t)$

- Mouvement autour du centre d'inertie (ou du point de référence)

⇒ 3 degrés de liberté de rotation : $\boldsymbol{\omega}(t)$

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + \boldsymbol{\sigma}$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\sigma}$$



Mouvement autour du centre d'inertie

$$\dot{\mathbf{N}}_O = m\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{G}^{ext} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}(t)$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = ?$$

Pour un solide rigide :

- $\mathbf{H}_C = \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega}$

- $T_C = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_C, T_C = ?$

Théorème II au centre d'inertie

Th II : $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O^{ext}$

Théorème "C" :
(repère de Koenig)
$$\begin{cases} \mathbf{H}_O = m\mathbf{c} \wedge \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}_C \\ \mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{G}^{ext} + \mathbf{M}_C^{ext} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_O &= m\dot{\mathbf{c}} \wedge \dot{\mathbf{c}} + m\mathbf{c} \wedge \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{H}}_C \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{c} \wedge \mathbf{G}^{ext} + \dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{G}^{ext} + \mathbf{M}_C^{ext} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{M}_C^{ext}$$

Le théorème du moment cinétique est valable, sans correction, dans des axes placés au centre d'inertie et gardant une orientation constante.

Théorème III au centre d'inertie

Th III : $\dot{T}_O = \mathcal{P}_O$

Théorème "C" :
(repère de Koenig)
$$\begin{cases} T_O = \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{c}}\|^2 + T_C \\ \mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \mathcal{P}_C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_O &= \frac{1}{2}m2\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}} + \dot{T}_C = \dot{\mathbf{c}} \cdot (m\ddot{\mathbf{c}}) + \dot{T}_C \\ &= \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \dot{T}_C = \mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G} + \mathcal{P}_C \end{aligned}$$

$$\dot{T}_C = \mathcal{P}_C$$

Le théorème de l'énergie cinétique est valable, sans correction, dans des axes placés au centre d'inertie et gardant une orientation constante.

Forces de cohésion

Soit

\mathbf{f}_{ij} = force de la part de i sur j

$\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ = force de la part de j sur i

$$\mathcal{P}_O = \dot{\mathbf{s}}_i \cdot \mathbf{f}_{ji} + \dot{\mathbf{s}}_j \cdot \mathbf{f}_{ij}$$

$$= (\dot{\mathbf{s}}_j - \dot{\mathbf{s}}_i) \cdot \mathbf{f}_{ij}$$

$$\text{Hyp : } \mathbf{f}_{ij} = \lambda_{ij}(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i)$$

$$= \lambda_{ij}(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i) \cdot (\dot{\mathbf{s}}_j - \dot{\mathbf{s}}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_{ij} \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\|^2 = 0 \quad \text{si } \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| = C^{te}$$

Dans un solide indéformable, les forces de cohésion développent une puissance résultante nulle.

Résultantes associées à \mathbf{g}

Soit

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}, \quad d\mathbf{F} = \mathbf{g} dm$$

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dm = \left(\int dm \right) \mathbf{g} = m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{M}_O = \int \mathbf{s} \wedge \mathbf{g} dm = \left(\int \mathbf{s} dm \right) \wedge \mathbf{g} = m\mathbf{c} \wedge \mathbf{g} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{G}$$

$$\mathcal{P}_O = \int \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{g} dm = \left(\int \dot{\mathbf{s}} dm \right) \cdot \mathbf{g} = m\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{g} = \dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{G}$$

Pour le calcul de toutes les résultantes dynamiques, la force de pesanteur (ainsi que toute force par unité de masse distribuée uniformément) est équivalente à une force unique égale à la résultante $m\mathbf{g}$ appliquée au centre d'inertie du système considéré.

Mouvement relatif de deux solides

- Solide I : $\mathbf{v}_{K_1}, \boldsymbol{\Omega}_1$
- Solide II : $\mathbf{v}_{K_2}, \boldsymbol{\Omega}_2$

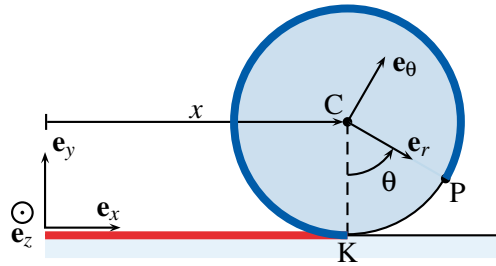
Mouvement relatif de II par rapport à I :

- Vitesse de glissement : $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{K_2} - \mathbf{v}_{K_1}$
- Vitesse relative de rotation : $\boldsymbol{\Omega}_{21} = \boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1$

Glissement

- Pas d'interpénétration des deux solides : $\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{n}_{12} \geq 0$.
- Roulement (avec glissement) : $\mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{n}_{12} = 0$,
- Roulement sans glissement : $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}$, i.e. $\mathbf{v}_{K_2} = \mathbf{v}_{K_1}$.

Roulement sans glissement



$$\mathbf{s}_P = x\mathbf{e}_x + R\mathbf{e}_y + R\mathbf{e}_r$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}_P &= \dot{x}\mathbf{e}_x + \mathbf{0} + R\dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{x}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r \\ &= \dot{x}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

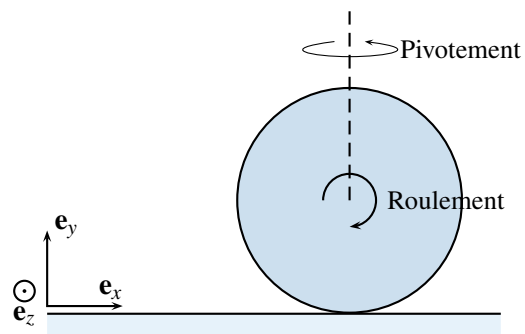
$$\dot{\mathbf{s}}_{K-disque} = \dot{\mathbf{s}}_P|_{P=K} = \dot{x}\mathbf{e}_x + R\dot{\theta}\mathbf{e}_x = (\dot{x} + R\dot{\theta})\mathbf{e}_x$$

Roulement sans glissement : $\dot{\mathbf{s}}_{K-disque} = \dot{\mathbf{s}}_{K-plan}$ où $\dot{\mathbf{s}}_{K-plan} = \mathbf{0}$

$$\dot{x} + R\dot{\theta} = 0$$

N.B. : $x + R\theta = C^{te}$

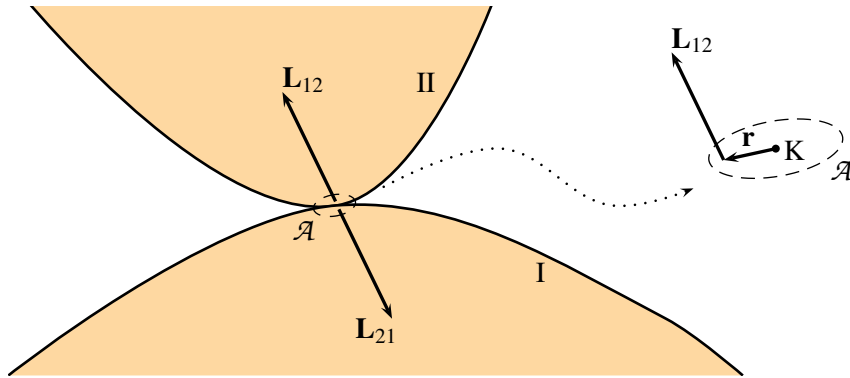
Roulement vs pivotement



$$\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_y \mathbf{e}_y] + [\Omega_x \mathbf{e}_x + \Omega_z \mathbf{e}_z]$$

Pivotement + Roulement

Forces de contact



\mathbf{L}_{12} : Force par unité de surface de I sur II

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{12} &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{L}_{12} d\mathcal{A} & \mathbf{G}_{21} &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{L}_{21} d\mathcal{A} = -\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{M}_{12}^K &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{L}_{12} d\mathcal{A} & \mathbf{M}_{21}^K &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{L}_{21} d\mathcal{A} = -\mathbf{M}_{12}^K \end{aligned}$$

MECA0003-2

Octobre 2020 – 19

Puissance développée

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I &= \int_{\mathcal{A}} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{L}_{21} d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{v}_{K_1} + \boldsymbol{\Omega}_1 \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{L}_{21} d\mathcal{A} \\ &= \mathbf{v}_{K_1} \cdot \int_{\mathcal{A}} \mathbf{L}_{21} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{L}_{21}) d\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 \\ &= \mathbf{v}_{K_1} \cdot \mathbf{G}_{21} + \mathbf{M}_{21}^K \cdot \boldsymbol{\Omega}_1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{II} = \mathbf{v}_{K_2} \cdot \mathbf{G}_{12} + \mathbf{M}_{12}^K \cdot \boldsymbol{\Omega}_2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{I+II} &= (\mathbf{v}_{K_2} - \mathbf{v}_{K_1}) \cdot \mathbf{G}_{12} + (\boldsymbol{\Omega}_2 - \boldsymbol{\Omega}_1) \cdot \mathbf{M}_{12}^K \\ &= \mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{G}_{12} + \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{M}_{12}^K \end{aligned}$$

NB : Expression indépendante du repère.

MECA0003-2

Octobre 2020 – 20

Frottement

$$\mathbf{G}_{12} = \mathbf{G}_{12}^{\perp} + \mathbf{G}_{12}^{\parallel}$$

- \mathbf{G}_{12}^{\perp} perp. à \mathbf{v}_{21} (i.e. selon \mathbf{n}_{12}), impose la contrainte cinématique;
- $\mathbf{G}_{12}^{\parallel}$ selon $-\mathbf{v}_{21}$, associé au frottement.

Modèle de Coulomb :

$$\text{Si } \mathbf{v}_{21} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{G}_{12}^{\parallel} = -\mu \|\mathbf{G}_{12}^{\perp}\| \frac{\mathbf{v}_{21}}{\|\mathbf{v}_{21}\|}$$

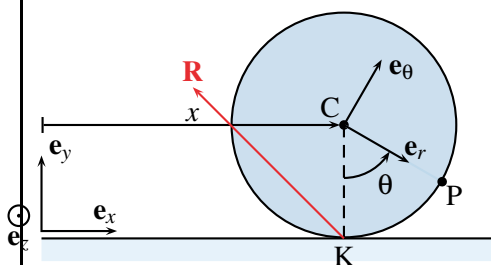
$$\text{Si } \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{G}_{12}^{\parallel}\| \leq \mu \|\mathbf{G}_{12}^{\perp}\|$$

μ est indépendant de \mathcal{A} et de $\|\mathbf{v}_{21}\|$ mais dépend des matières en contact (attraction moléculaire), du fini de surface et des déformations réelles.

MECA0003-2

Octobre 2020 – 21

Disque sur un plan horizontal



$$\dot{\mathbf{s}}_{K-disque} = \mathbf{v}_{gl} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{R} = N\mathbf{e}_y + T\mathbf{e}_x$$

- N impose la contrainte cinématique;
- T est associé au frottement :

$$T\mathbf{e}_x = -\mu|N| \frac{\mathbf{v}_{gl}}{\|\mathbf{v}_{gl}\|} \quad \text{si } \mathbf{v}_{gl} \neq \mathbf{0}$$

$$\text{Roulement sans glissement } (\mathbf{v}_{gl} = \mathbf{0}) : \quad |T| \leq \mu|N|$$

MECA0003-2

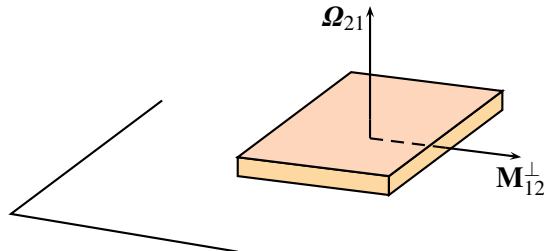
Octobre 2020 – 22

Frottement

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{12}^{\perp} + \mathbf{M}_{12}^{\parallel}$$

- \mathbf{M}_{12}^{\perp} perp. à $\boldsymbol{\Omega}_{21}$, impose la contrainte cinématique;
- $\mathbf{M}_{12}^{\parallel}$ selon $-\boldsymbol{\Omega}_{21}$, associé au frottement.

Exemple : livre sur une table.



MECA0003-2

Octobre 2020 – 23

Frottement

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{12}^{\perp} + \mathbf{M}_{12}^{\parallel}$$

- \mathbf{M}_{12}^{\perp} perp. à $\boldsymbol{\Omega}_{21}$, impose la contrainte cinématique;
- $\mathbf{M}_{12}^{\parallel}$ selon $-\boldsymbol{\Omega}_{21}$, associé au frottement.

Modèle de Coulomb :

$$\text{Si } \boldsymbol{\Omega}_{21} \neq \mathbf{0} : \quad \mathbf{M}_{12}^{\parallel} = -\mu^{\Omega} \|\mathbf{G}_{12}^{\perp}\| \frac{\boldsymbol{\Omega}_{21}}{\|\boldsymbol{\Omega}_{21}\|}$$

$$\text{Si } \boldsymbol{\Omega}_{21} = \mathbf{0} : \quad \|\mathbf{M}_{12}^{\parallel}\| \leq \mu^{\Omega} \|\mathbf{G}_{12}^{\perp}\|$$

$[\mu^{\Omega}] = L$: dépend de \mathcal{A} , des matières en contact, du fini de surface et des déformations réelles.

MECA0003-2

Octobre 2020 – 24

Puissance développée

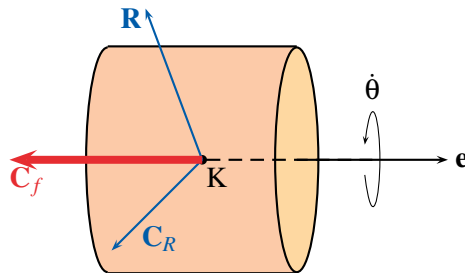
$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_{I+II} &= \mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{G}_{12} + \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{M}_{12}^K \\
 &= \mathbf{v}_{21} \cdot (\mathbf{G}_{12}^\perp + \mathbf{G}_{12}^\parallel) + \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot (\mathbf{M}_{12}^\perp + \mathbf{M}_{12}^\parallel) \\
 &= \mathbf{v}_{21} \cdot \mathbf{G}_{12}^\parallel + \boldsymbol{\Omega}_{21} \cdot \mathbf{M}_{12}^\parallel \\
 &= -\mu \|\mathbf{v}_{21}\| \|\mathbf{G}_{12}^\perp\| - \mu^\Omega \|\boldsymbol{\Omega}_{21}\| \|\mathbf{G}_{12}^\perp\|
 \end{aligned}$$

Liaison parfaite ($\mathcal{P}_{I+II} = 0$) :

- contact ponctuel $\Rightarrow \mu^\Omega = 0$
- roulement sans glissement : $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0}$

Liaison pivot

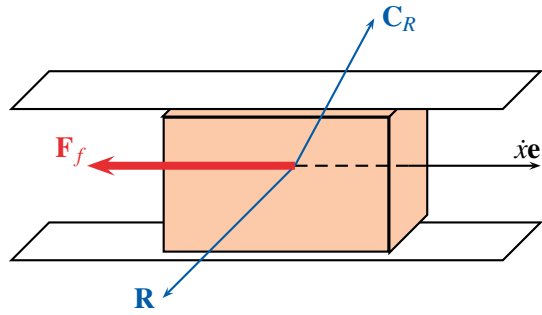
Ex. : tambour/cuve de lave-linge.



	ddl	Coord. gén.	$\mathbf{G}^\perp / \mathbf{M}^\perp$	$\mathbf{G}^\parallel / \mathbf{M}^\parallel$
Trans.	3 - 3 = 0	-	\mathbf{R}	-
Rot.	3 - 2 = 1	$\dot{\theta} \mathbf{e}$	$\mathbf{C}_R \perp \mathbf{e}$	$\mathbf{C}_f = -\mu^\Omega \ \mathbf{R}\ \text{sgn}(\dot{\theta}) \mathbf{e}$

Liaison glissière

Ex. : ascenseur / cage



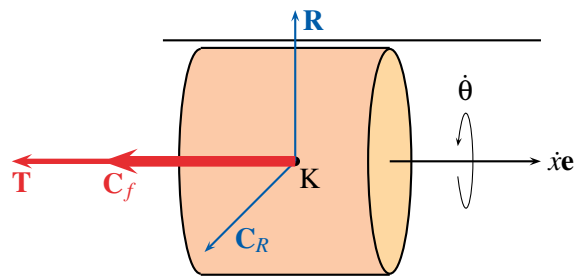
	ddl	Coord. gén.	$\mathbf{G}^\perp / \mathbf{M}^\perp$	$\mathbf{G}^\parallel / \mathbf{M}^\parallel$
Trans.	$3 - 2 = 1$	$\dot{x}\mathbf{e}$	$\mathbf{R} \perp \mathbf{e}$	$\mathbf{F}_f = -\mu \ \mathbf{R}\ \text{sgn}(\dot{x})\mathbf{e}$
Rot.	$3 - 3 = 0$	-	\mathbf{C}_R	-

MECA0003-2

Octobre 2020 – 27

Pivot glissant

Ex. : piston / cylindre ou capuchon sur bic



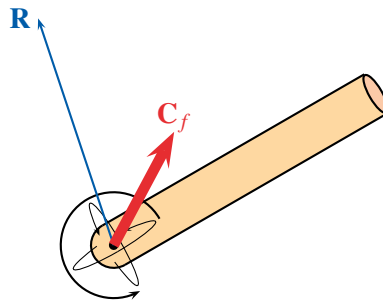
	ddl	Coord. gén.	$\mathbf{G}^\perp / \mathbf{M}^\perp$	$\mathbf{G}^\parallel / \mathbf{M}^\parallel$
Trans.	$3 - 2 = 1$	$\dot{x}\mathbf{e}$	$\mathbf{R} \perp \mathbf{e}$	$\mathbf{T} = -\mu \text{sgn}(\dot{x}) \ \mathbf{R}\ \mathbf{e}$
Rot.	$3 - 2 = 1$	$\dot{\theta}\mathbf{e}$	$\mathbf{C}_R \perp \mathbf{e}$	$\mathbf{C}_f = -\mu^\Omega \text{sgn}(\dot{\theta}) \ \mathbf{R}\ \mathbf{e}$

MECA0003-2

Octobre 2020 – 28

Liaison rotule

Ex. : fémur / os iliaque



	ddl	Coord. gén.	$\mathbf{G}^\perp / \mathbf{M}^\perp$	$\mathbf{G}^\parallel / \mathbf{M}^\parallel$
Trans.	$3 - 3 = 0$	-	\mathbf{R}	-
Rot.	$3 - 0 = 3$	$\boldsymbol{\Omega}$	-	$\mathbf{C}_f = -\mu^\Omega \ \mathbf{R}\ \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\ \boldsymbol{\Omega}\ }$