Université de Liège



Exercice intégré n°2

Géomagnétisme et dynamique des particules chargées

Eric Delhez¹, Claude Jamar³, Géraldine Martin², Jacques Nihoul², Pierre Rochus³ et François Ronday²

¹Service de Mathématiques Générales ²Service de Mécanique Rationnelle ³Centre Spatial de Liège

 $\mathrm{Mai}\ 2000$

Avant-propos.

Les cours/exercices intégrés sont des enseignements organisés dans le cadre d'un cours donné, dit cours pivot, sur un thème ciblé, par un groupe de professeurs titulaires de cours situés en amont (c'est-à-dire de cours dont les matières sont utilisées dans le cours pivot), de professeurs du cours pivot et de professeurs titulaires de cours situés en aval (c'est-à-dire de cours qui appliquent les matières vues au cours pivot).

Le but de ces cours/exercices intégrés est de montrer aux étudiants la continuité des enseignements et la nécessité de bien assimiler les bases fondamentales pour aborder le champ des applications.

Les cours/exercices intégrés font l'objet de cahiers séparés qui reprennent et développent les matières vues dans les différents cours de façon spécifique au thème choisi. Ces cahiers sont présentés de manière à être accessibles à un plus large public que celui des étudiants du cours pivot : étudiants d'une autre section ou année universitaire, enseignants, voire étudiants, de l'Enseignement Secondaire. Pour ce faire, les détails de certains calculs et démonstrations sont isolés en petits caractères dans des encadrés qui ne sont pas indispensables à une lecture générale du texte (Ces parties sont essentielles par contre à la compréhension de la matière approfondie pour les étudiants du cours pivot.).

1 Introduction.

L'orientation d'une aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre est connue depuis très longtemps. En effet, les premières descriptions du phénomène remontent à l'an 1000 en Chine et au 12° siècle en occident. À partir de ce moment, la *boussole magnétique* s'imposa progressivement comme outil de navigation. Cependant, il a fallu attendre 1576 pour que l'anglais Robert Norman localise sur Terre le point d'attraction de l'aiguille aimantée de la boussole, *i.e.* le *pôle magnétique*. Dans la foulée, Sir William Gilbert (1544-1603), physicien de la reine Elisabeth 1^{re}, proposa une première description globale du magnétisme terrestre en assimilant la Terre à un grand aimant possédant des pôles magnétiques et un équateur magnétique. À cette époque de navigation et d'exploration, on s'intéressait naturellement à la boussole et au magnétisme terrestre.

Aujourd'hui encore, de nombreuses questions demeurent quant à l'origine et la dynamique du champ magnétique terrestre mais c'est une autre forme d'exploration, l'exploration spatiale, qui motive et nourrit l'étude des phénomènes magnétiques au voisinage de la Terre.

À partir du 18° siècle, les indices expérimentaux se sont accumulés prouvant l'influence importante de l'activité solaire sur le champ magnétique terrestre. Ainsi, dès les années 1730, l'astronome suédois Celsius établit un rapprochement entre les perturbations erratiques du champ magnétique observées certains jours à la surface de la Terre et les observations d'*aurores polaires*, c'est-à-dire de phénomènes de luminescence de la haute atmosphère des régions polaires. Or, on sait depuis la fin du 19° siècle et les travaux du physicien norvégien Olag K. Birkeland, que ces aurores naissent de l'interaction du champ magnétique terrestre et de particules électrisées issues du Soleil et pénétrant dans l'atmosphère terrestre à l'occasion d'orages magnétiques.

La pierre angulaire pour la compréhension théorique de ces phénomènes fut apportée par la découverte de l'électromagnétisme par Hans Christian Oersted en 1821. Plus tard, le couplage entre électricité et magnétisme, fut explicité par les célèbres lois de Maxwell (1873) soutendant réellement toute la théorie moderne de l'électromagnétisme. La portée de ces équations est telle qu'elle a fait dire au physicien Boltzmann : "Est-ce un dieu qui a écrit ces lignes ...".

Avec la mise en orbite de Spoutnik I le 4 octobre 1957, l'exploration spatiale est entrée dans une phase active accélérée et, avec elle, a commencé une nouvelle phase d'une recherche passionante consacrée à notre environnement extra-atmosphérique. C'est ainsi que le premier satellite américain, Explorer I, lancé le 31 janvier 1958, permit à Van Allen de découvrir une ceinture de radiation entourant la Terre. Les missions successives ont permis de comprendre progressivement cet environnement inhabituel pour l'homme. Cette compréhension est indispensable à la poursuite de l'aventure spatiale.

Singulièrement, étant donné le couplage étroit entre le magnétisme terrestre et l'électromagnétisme de la haute atmosphère, la conquête spatiale permet également une meilleure compréhension des phénomènes se produisant au centre et à la surface de la Terre.

2 Mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique.

Lorsqu'une particule assimilable à un point matériel de masse m et portant une charge électrique q est plongée dans un champ électromagnétique, elle est soumise à la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{1}$$

où \mathbf{v} est la vitesse de la particule, \mathbf{E} est le champ électrique et \mathbf{B} l'induction magnétique. Si les autres forces peuvent être négligées, la loi de Newton pour la particule chargée s'écrit donc

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \tag{2}$$

où a désigne l'accélération de la particule.

La force de Lorentz est la combinaison de deux composantes de natures très différentes :

– D'une part, le champ électrique tend à accélérer la particule dans la direction de **E**. Dans le cas où les champs électrique et magnétique sont stationnaires, on peut décrire le champ électrique au moyen d'un potentiel électrique V_e représentant l'énergie nécessaire pour amener une charge unitaire de l'infini (où son énergie potentielle électrique est supposée nulle) au point considéré. On écrit alors

$$\mathbf{E} = -\nabla V_e \tag{3}$$

Selon les équations de Maxwell (e.g. Nihoul, 1984), dans le vide ou en l'absence de matériaux magnétiques ou diélectriques, on a

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \gamma \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 (\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}) \tag{7}$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide, γ est la charge par unité de volume, μ_0 est la perméabilité du vide et **J** est le vecteur densité de courant. Ces équations résument mathématiquement la dynamique couplée des champs magnétique et électrique. On voit que le champ électrique est généré par des charges électriques ou des variations locales du champ magnétique. Le champ magnétique, pour sa part, peut être généré par un courant électrique, i.e. un déplacement de charge, ou une variation du champ électrique. Il n'y a donc pas de "charges magnétiques" qui seraient les sources du champ magnétique, comme les charges électriques sont les sources du champ électrique.

Dans le cas stationnaire, la troisième équation de Maxwell devient

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \tag{8}$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{E} = -\nabla V_e$$

où V_e désigne le potentiel électrique.

– D'autre part, la force induite par le champ magnétique, à l'inverse de la force induite par le champ électrique, n'agit que sur des particules en mouvement. De plus, la force qui en résulte est toujours perpendiculaire à la vitesse. Dès lors, l'action du champ magnétique ne modifie pas l'énergie cinétique de la particule mais se limite à en infléchir continuellement la trajectoire (sauf si la vitesse est alignée avec la direction de **B**).

Au total, dans le cas de champs stationnaires, le mouvement de la particule chargée est donc caractérisé par la conservation de l'énergie :

$$T + q V_e = \text{constante} \tag{9}$$

Toute augmentation de l'énergie cinétique T de la particule induite par l'action du champ électrique est réalisée au détriment de son énergie potentielle électrique.

Notant s le vecteur position de la particule et désignant par (`) la dérivée temporelle d'une variable, il vient, en multipliant scalairement l'équation (2) par la vitesse de la particule,

$$m\dot{\mathbf{s}}\cdot\ddot{\mathbf{s}} = q\dot{\mathbf{s}}\cdot\mathbf{E} = -q\dot{\mathbf{s}}\cdot\nabla V_e \tag{10}$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) + q\,\frac{dV_e}{dt} = 0\tag{11}$$

soit, après intégration temporelle,

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV_e = \text{ constante}$$
(12)

En l'absence de champ électrique, le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique constant et uniforme est hélicoïdal. En effet, le mouvement peut être décomposé en deux parties :

- un mouvement de translation à vitesse constante dans la direction du champ magnétique : la force de Lorentz étant perpendiculaire au champ magnétique, la vitesse des particules dans la direction de B reste constante;
- un mouvement de rotation autour de **B** : la force de Lorentz étant perpendiculaire à la vitesse, elle infléchit continuellement la trajectoire dans le plan normal à **B** et induit un mouvement de rotation à vitesse constante.

On peut aisément calculer les caractéristiques du mouvement de rotation. Une trajectoire circulaire est possible si la composante radiale de la force de Lorentz est compensée exactement par la force centrifuge (Fig. 1).



Fig. 1

Dans ce cas, si on note \mathbf{u} la vitesse dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B} et r le rayon de la composante circulaire du mouvement, il vient

$$m\frac{u^2}{r} = |q|uB \tag{13}$$

$$\omega_c = \frac{u}{r} = \frac{|q|B}{m} \tag{14}$$

où ω_c est appellée la fréquence cyclotronique.

Remarquons que les charges électriques tournent autour de \mathbf{B} dans des sens différents selon leur signe. La figure 1 présente le cas d'un électron.

soit

La fréquence cyclotronique ne dépend que des caractéristiques de la particule étudiée et de l'intensité du champ magnétique. Dans un champ magnétique donné, les électrons effectueront donc tous une rotation complète pendant le même laps de temps mais en suivant des trajectoires circulaires de rayon d'autant plus grand que leur vitesse est grande.

La composition de ces mouvements de translation et de rotation donne le mouvement hélicoïdal annoncé (Fig. 2). Ce résultat peut également être obtenu directement par résolution de l'équation de Newton pour une particule chargée soumise à une induction magnétique constante et uniforme.



Fig. 2

Lorsque le champ électrique est nul, l'équation (2) se réduit à

$$m\ddot{\mathbf{s}} = q\dot{\mathbf{s}} \wedge \mathbf{B} \tag{15}$$

soit, en considérant un électron (q < 0),

$$\ddot{\mathbf{s}} = \omega_c \mathbf{b} \wedge \dot{\mathbf{s}} \tag{16}$$

où \mathbf{b} est le vecteur unitaire porté par \mathbf{B} . On obtient, après une première intégration,

$$\dot{\mathbf{s}} = \omega_c \mathbf{b} \wedge \mathbf{s} + \mathbf{v}_0 - \omega_c \mathbf{b} \wedge \mathbf{s}_0 \tag{17}$$

où \mathbf{s}_0 et \mathbf{v}_0 désignent respectivement les vecteurs position et vitesse initiales. Remplaçant cette expression de $\dot{\mathbf{s}}$ dans (16), il vient

$$\ddot{\mathbf{s}} = \omega_c^2 \, \mathbf{b} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{s}) + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \mathbf{v}_0 - \omega_c^2 \, \mathbf{b} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{s}_0) \tag{18}$$

Décomposons cette équation en ses composantes perpendiculaire et parallèle à \mathbf{b} en posant (Fig. 3)

$$\mathbf{s} = z \, \mathbf{b} + \mathbf{r} \qquad o\dot{\mathbf{u}} \qquad \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 0 \tag{19}$$



1 10.

On a, à chaque instant,

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{z} \, \mathbf{b} + \dot{\mathbf{r}} \qquad o\dot{\mathbf{u}} \qquad \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b} = 0 \tag{20}$$

et, en particulier, à l'instant initial,

$$\mathbf{s}_0 = z_0 \,\mathbf{b} + \mathbf{r}_0 \qquad et \qquad \mathbf{v}_0 = w_0 \,\mathbf{b} + \mathbf{u}_0 \tag{21}$$

Substituant ces expressions dans (18), nous obtenons

$$\ddot{z} = 0 \tag{22}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_c^2 \, \mathbf{r} = \omega_c^2 \, \mathbf{r}_0 + \omega_c \, \mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_0 \tag{23}$$

Ces deux équations s'intègrent immédiatement :

$$z = w_0 t + z_0 \tag{24}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{u}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_0}{\omega_c} \left(1 - \cos \omega_c t\right)$$
(25)

de sorte que la solution s'écrit finalement

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + w_0 t \,\mathbf{b} + \frac{\mathbf{u}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_0}{\omega_c} \left(1 - \cos \omega_c t\right) \tag{26}$$

Le mouvement est un mouvement hélicoïdal (Fig. 2), superposition d'un mouvement de translation à vitesse constante dans la direction de **b** et d'une rotation autour de cet axe à la vitesse angulaire constante ω_c . On montre en effet aisément que

$$\left\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{b} \wedge \mathbf{u}_0}{\omega_c}\right\| = constante \tag{27}$$

3 Le champ magnétique dipolaire terrestre.

3.1 Origine du magnétisme terrestre.

Jusque 1820, on réduisait le magnétisme aux seuls aimants permanents, les matériaux ferromagnétiques présentant une aimantation rémanente. Dès lors, le magnétisme terrestre était expliqué par la présence d'une gigantesque masse aimantée au centre de la Terre. Cependant, cette explication n'est pas pleinement satisfaisante car elle ne permet pas de rendre compte des observations qui montrent des variations lentes de la direction et de l'intensité du champ magnétique de décennies en décennies.

A partir de 1820 et de l'expérience de Hans Christian Oersted qui observa la déviation d'une aiguille aimantée placée à proximité d'un circuit électrique, on identifia une autre cause possible du champ magnétique : la circulation de courants électriques. Ainsi, fut établi le rapport étroit existant entre les phénomènes électriques et magnétiques, phénomènes considérés jusque là comme totalement indépendants. Le rapport entre électricité et magnétisme trouve son expression ultime dans les lois de Maxwell (1831-1879).

Aujourd'hui, on ne connaît pas encore tous les détails des origines du magnétisme terrestre. Cependant, le principe de la dynamo introduit par Michael Faraday (1791-1867) permet de donner une explication simple relativement satisfaisante.

Le centre de la terre est constitué d'un noyau solide plongé dans un noyau liquide dense occupant le moitié du rayon terrestre. La chaleur générée dans le noyau solide (par des processus encore mal connus) est exportée vers la périphérie de la terre par des courants de convection qui se superposent aux composantes du mouvement induites par la rotation de la Terre et agitent le noyau liquide. Celui-ci étant très riche en fer, il en résulte des déplacements de charges électriques au sein du champ magnétique terrestre, c'est-à-dire des courants électriques, qui sont influencés par la force de Lorentz (1). Tous les courants électriques qui naissent ainsi contribuent eux-mêmes à la création du champ magnétique. L'intensité et la structure du champ magnétique terrestre proviennent donc d'un équilibre entre ces différents phénomènes tel que le champ magnétique créé par la circulation des courants électriques au sein du noyau liquide.

En réalité, l'explication ne peut s'arrêter là car, par exemple, ce mécanisme de la dynamo magnétomotrice ne peut expliquer la symétrie du champ magnétique (e.g. Cowling, 1957). En plus des transferts de chaleur au travers du noyau liquide et de la rotation de la terre, les modèles actuels tiennent compte du caractère aléatoire de la circulation au sein du noyau liquide.

3.2 Structure du champ magnétique terrestre.

La structure du champ magnétique au voisinage de la terre est représentée à la figure 4 par les lignes de champ de **B**, c'est-à-dire les lignes qui sont tangentes à **B** en chacun de leurs points. (Le rapprochement des lignes de champ en un point indique une intensification de **B** en ce point.) Cette structure peut être raisonnablement décrite, jusqu'à une distance de quatre ou cinq fois le rayon terrestre, par le champ magnétique créé par un un dipôle magnétique d'intensité égale à 8,01 10^{22} A m².



FIG. 4 - Champ magnétique terrestre : lignes de champ réelles (trait continu) et lignes du champ dipolaire (trait interrompu).

Considérons le dipôle magnétique constitué par une boucle de courant circulaire de rayon R et parcourue par un courant électrique d'intensité i. Selon la loi de Bio-Savart, le champ magnétique produit par cette boucle en un point P est donné par

$$\mathbf{B} = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\mathbf{dl} \wedge \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \tag{28}$$

où \mathbf{r} est le vecteur position de P par rapport à l'élément de courbe **dl** (Fig. 5).

Sans perte de généralité, on peut choisir un repère O $\mathbf{e}_{\rho}\mathbf{e}_{\varphi}\mathbf{e}_{z}$ de coordonnées cylindriques centré au centre de la boucle tel que \mathbf{e}_{z} soit perpendiculaire au plan de la boucle et tel que le vecteur position de P par rapport à O s'écrive

$$\mathbf{s} = r\mathbf{e}_{\rho} + z\mathbf{e}_z \tag{29}$$



Fig. 5

Il vient successivement

$$i\mathbf{dl} = R \, i \, d\theta \mathbf{e}_{\theta} = R \, i \, d\theta (\cos \theta \mathbf{e}_{\varphi} - \sin \theta \mathbf{e}_{\rho}) \tag{30}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} - R\mathbf{e}_r \tag{31}$$

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\theta}$$
(32)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o i R}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z \cos \theta \mathbf{e}_\rho + z \sin \theta \mathbf{e}_\varphi + (R - r \cos \theta) \mathbf{e}_z}{(r^2 + z^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$
(33)

En évaluant cette intégrale, on trouve immédiatement que $B_{\varphi} = 0$, résultat qui aurait aussi pu être obtenu directement en tenant compte de la symétrie du système.

Pour
$$\frac{2rR\cos\theta}{r^2 + z^2 + R^2} < 1$$
, c'est-à-dire suffisamment loin de la boucle, on a

$$\frac{1}{(r^2 + z^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} = (34)$$
$$\frac{1}{(r^2 + z^2 + R^2)^{3/2}} \{1 + \frac{3rR\cos\theta}{r^2 + z^2 + R^2}\} + O\left(\frac{r^2R^2}{(r^2 + z^2 + R^2)^{7/2}}\right)$$

où la convergence de la série est uniforme. Par intégration terme à terme, il vient donc

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (r^2 + z^2 + R^2)^{3/2}} \left\{ \frac{3rRz\pi}{(r^2 + z^2 + R^2)} \mathbf{e}\rho + \left(2\pi R - \frac{3r^2R\pi}{(r^2 + z^2 + R^2)}\right) \mathbf{e}z \right\}$$
(35)

$$+\frac{\mu_0 iR}{4\pi}O\left(\frac{r^2R^2z}{(r^2+z^2+R^2)^{7/2}}\right)\mathbf{e}_{\rho}+\frac{\mu_0 iR}{4\pi}O\left(\frac{r^2R^2(r+R)}{(r^2+z^2+R^2)^{7/2}}\right)\mathbf{e}_z$$

Considérant ensuite une boucle de courant de rayon $R \to 0$ mais dont le moment dipolaire magnétique $M = \pi R^2 i$ reste fini, il vient

$$\mathbf{B} = \frac{3\mu_0 Mrz}{4\pi (r^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}\rho + \left(\frac{\mu_0 M}{2\pi (r^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3\mu_0 Mr^2}{4\pi (r^2 + z^2)^{5/2}}\right) \mathbf{e}_z \qquad (36)$$

Posant $k = \frac{M\mu_0}{4\pi}$, on a

$$\mathbf{B} = \frac{3krz}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}\rho + \frac{2kz^2 - kr^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \mathbf{e}_z$$
(37)

valable en tous les points de l'espace différents de l'origine. Remarquons que ce champ magnétique peut encore être écrit sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}\rho + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z \tag{38}$$

où

$$U(r,z) = -\frac{kz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$
(39)

est le potentiel géomagnétique.

La possibilité d'exprimer le champ magnétique dipolaire sous la forme du gradient de la fonction scalaire U provient ici de l'absence de courant dans le domaine étudié (sauf à l'origine) de sorte que

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0} \tag{40}$$

Partant de l'expression du potentiel géomagnétique (39), on peut aisément déterminer l'équation des lignes de champ du dipôle magnétique représentées à la figure 4 (trait interrompu).

Introduisant les coordonnées sphériques ρ, θ, φ (e.g. Delhez, 1999), il vient simplement

$$U(\rho, \theta, \varphi) = -\frac{k \cos \theta}{\rho^2} \tag{41}$$

et donc

$$\mathbf{B} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_{\theta} = \frac{2k \cos \theta}{\rho^3} \mathbf{e}_{\rho} + \frac{k \sin \theta}{\rho^3} \mathbf{e}_{\theta}$$
(42)

Les tangentes aux lignes de champ de \mathbf{B} étant parallèles à \mathbf{B} , elles satisfont à la relation

$$\frac{d\rho}{\rho \, d\theta} = \frac{B_{\rho}}{B_{\theta}} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta} \tag{43}$$

Par intégration, il vient immédiatement

$$\rho(\theta) = C \sin^2 \theta \tag{44}$$

où C est une constante d'intégration. En particulier, l'équation de la ligne de force passant à une distance d du centre de la terre au niveau de l'équateur géomagnétique est donnée par

$$\rho(\theta) = d\sin^2\theta \tag{45}$$

Comme le suggère la figure 4, l'axe du dipôle magnétique n'est pas rigoureusement aligné avec l'axe de rotation de la Terre. L'axe du dipôle magnétique qui représente le mieux le champ magnétique terrestre présente une inclinaison de 11° par rapport à l'axe de rotation de la terre. De plus, il est déplacé par rapport au centre de la terre de 515 km dans la direction du Pacifique Nord. Il en résulte un minimum local du champ magnétique dans la région de l'Atlantique Sud.

Le champ magnétique terrestre n'est, en réalité, ni parfaitement symétrique ni constant. D'une part, des variations locales de l'intensité et de la direction du champ magnétique sont induites par les inhomogénéités des roches qui composent la croûte terrestre et par la présence de masses concentrées de minerai magnétique. C'est pourquoi les cartes géographiques indiquent généralement l'angle entre les directions des pôles nord géographiques et magnétiques, appelé déclinaison, dans la zone représentée. D'autre part, le champ magnétique dipolaire subit des dérives séculaires : diminution de l'intensité (0.05 % par an), dérive de l'axe (0.014° par an) et accroissement du décalage vers le Pacifique (3 km par an). On pense que ces variations sont dues au caractère irrégulier des mouvements au sein du noyau liquide de la Terre. En observant l'orientation des matériaux magnétiques au sein de certaines roches d'origine volcanique, on a aussi observé que la polarité du champ magnétique terrestre s'est inversée au moins 171 fois au cours des dernières 75 millions d'années. En effet, lorsque la lave se solidifie, les matériaux présentant une aimantation rémanente sont figés selon l'orientation du champ magnétique terrestre existant à ce moment. Les roches enregistrent donc la direction du champ magnétique terrestre au moment de leur cristallisation. Cette propriété est à l'origine d'une discipline scientifique, appelée paléomagnétisme, qui étudie l'histoire du magnétisme terrestre et permet d'en déduire, par exemple, la dérive des continents.

A ces variations à long terme, on doit encore ajouter l'influence d'éléments extérieurs à la Terre qui induisent des perturbations de quelques heures ainsi que des variations diurnes, annuelles et undécennales de \mathbf{B} sur lesquelles nous reviendrons dans la suite.

Actuellement, les pôles magnétiques, c'est-à-dire les points de la surface de la terre où le champ magnétique est dirigé selon la verticale du lieu sont situés, respectivement, au voisinage de l'Ile de Bathurst, dans le Nord Canadien, soit environ à 1200 km du pôle nord géographique et à proximité de la côte de la Terre Adélie, en Antarctique, à 2250 km du pôle sud géographique. Il convient de remarquer que le pôle nord terrestre est en fait un pôle sud magnétique (et inversement). En effet, les lignes d'induction sortent du pôle sud géographique et convergent au pôle nord qui correspondent donc respectivement aux pôles nord et sud magnétiques (Fig. 4). De même, le pôle nord de la boussole s'oriente vers le pôle nord terrestre or, en magnétisme, deux pôles de même type se repoussent!

3.3 Mouvement d'une particule chargée dans le champ magnétique dipolaire terrestre.

Lorsqu'une particule chargée, de masse m et de charge q, se déplace dans le champ magnétique terrestre, elle est, à chaque instant, soumise à la force de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \tag{46}$$

En raison de l'importance de la vitesse des particules chargées - protons, électrons et autres ions - se déplaçant au voisinage de la terre, les autres forces, et en particulier la force d'attraction universelle et la force associée au champ électrique, sont généralement négligeables. En effet, considérons, par exemple, le cas des protons (charge électrique $p^+ = 1, 6 \, 10^{-19}$ C, masse $m = 1, 67 \, 10^{-27}$ kg) de basse altitude (distance au centre de la Terre égale à $1,5 R_T$ où $R_T = 6,37 \, 10^6$ m est le rayon terrestre moyen). Ces protons se déplacent autour de la Terre à des vitesses de l'ordre de 10^7 m/s. En évaluant l'intensité de l'induction magnétique B à cette distance dans le plan de l'équateur géomagnétique (z = 0), on obtient, d'après (37) et en tenant compte de $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m,

$$B = \frac{M\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} = 9,18\,10^{-6}\,\mathrm{T}$$
(47)

À cette même distance, l'accélération de la pesanteur vaut approximativement

$$\gamma \approx \frac{9,83}{1,5^2} = 4,4 \,\mathrm{m/s^2}$$
(48)

Le rapport de la force de Lorentz et de la force d'attraction universelle s'obtient aisément

$$\frac{p^+ v B}{m\gamma} \approx 2\,10^9\tag{49}$$

L'attraction de la terre est donc largement négligeable.

De même, l'effet du champ électrique ne doit être pris en compte que si l'intensité de celui-ci atteint

$$E \approx v B \approx 100 \,\mathrm{V/m}$$
 (50)

ce qui est bien supérieur aux valeurs généralement rencontrées.

Si on néglige, provisoirement, les variations spatiales de **B**, il en résulte, comme nous l'avons montré, un mouvement de rotation de la particule autour des lignes de champ de **B** à la fréquence cyclotronique. On remarquera que, pour une induction donnée, ω_c ne dépend que de la masse de la particule, la plupart des charges ionosphériques étant en effet égales à celle de l'électron. On en déduit que la fréquence cyclotronique du proton est 1840 fois plus faible que celle de l'électron (rapport des masses).

Calculons le rayon de gyration, appelé *rayon de Larmor*, d'un proton de basse altitude de 10 MeV^1 . D'après (14), on a

$$R_{Larmor} = \frac{mu}{p^+ B} \tag{51}$$

où u désigne la composante de la vitesse du proton perpendiculaire à **B**. En supposant que la vitesse du proton est essentiellement perpendiculaire à **B**, on a

$$E_c = \frac{1}{2}mu^2 = 1,6\,10^{-12}\text{J} \Rightarrow u = 4,38\,10^7\text{m/s}$$
 (52)

Dès lors,

$$R_{Larmor} \approx 5\,10^4\,\mathrm{m} \tag{53}$$

De même, le période de gyration τ_g autour d'une ligne de champ s'obtient aisément à partir de (14) soit

$$\tau_g = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi m}{p^+ B} = 7,1\,10^{-3} \text{s}$$
(54)

Le calcul des caractéristiques du mouvement des électrons est plus délicat. Si on considère un électron de basse altitude $(1,5 R_T)$ de 1 MeV et de masse au repos $m_0 = 9,1110^{-31}$ kg, on obtiendrait, en suivant le même raisonnement que précédemment, $u = 5,910^8$ m/s, soit une vitesse supérieure à celle de la lumière ($c = 310^8$ m/s). Ce n'est évidemment pas possible car il convient de prendre en compte les corrections relativistes. Dans ce cadre, il vient

$$E_c = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - 1\right) = 1,6 \, 10^{-13} \text{J}$$
(55)
$$\Rightarrow \quad u = 2,82 \, 10^8 \text{m/s}$$

¹Un électron-volt (eV) représente l'énergie acquise par une électron accéléré par une chute de potentiel électrique de 1 volt et correspond donc à $1,6\,10^{-19}$ J. Un mégaélectron-volt (MeV) est égal à 10^6 eV.

À cette vitesse, la masse de l'électron vaut

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 2,69\,10^{-30}kg\tag{56}$$

Les caractéristiques de la trajectoire sont donc

$$R_{Larmor} \approx 500 \text{ m}$$
 et $\tau_g \approx 10^{-5} \text{ s}$ (57)

Au mouvement de gyration autour de \mathbf{B} , se superpose un mouvement de translation dans la direction des lignes de champ de l'induction magnétique et donc un mouvement de convergence vers les pôles magnétiques. L'intensité du champ magnétique étant variable le long d'une telle trajectoire (comme en témoigne le rapprochement des lignes de champ), il en résulte une modification continue du rayon de Larmor et de la fréquence cyclotronique : au fur et à mesure que la particule se rapproche du pôle magnétique, B augmente et, en vertu de (14), la fréquence cyclotronique augmente. Dans le même temps, le rayon de Larmor diminue.

Au voisinage des pôles magnétiques, les lignes de champs convergent et la force de Lorentz, perpendiculaire à **B**, comporte donc une composante qui s'oppose au mouvement des particules chargées dans la direction du pôle (Fig. 6). Lorsqu'une particule chargée se rapproche d'un pôle, cette composante de la force de Lorentz induit donc la diminution progressive de la vitesse longitudinale et finit par provoquer la réflexion de la particule en un point appelé *point miroir*. C'est l'*effet miroir*.



En raison de l'effet miroir, les particules chargées rebondissent perpétuellement d'un pôle magnétique à l'autre et ne peuvent que rarement pénétrer dans l'atmosphère terrestre. Le temps nécessaire pour effectuer un aller-retour entre les deux pôles est appelé la *période de rebond*. Pour l'électron de basse altitude de 1 MeV considéré précédemment, cette période est de l'ordre de 0,1 seconde. Pour le proton de basse altitude de 10 MeV, elle est de 65 secondes. Considérons le mouvement d'une particule chargée dans le champ d'induction magnétique

$$\mathbf{B} = \alpha \, \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|^3} \tag{58}$$

où α est une constante. Celui-ci reproduit qualitativement la convergence des lignes du champ magnétique terrestre au voisinage des pôles magnétiques comme on peut s'en convaincre en comparant les figures 4 et 9.

L'équation du mouvement est

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{\alpha q}{m} \frac{\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{s}\|^3} \tag{59}$$

Cette équation possède de nombreuses intégrales premières. Ainsi :

$$\dot{\mathbf{s}} \cdot \ddot{\mathbf{s}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = v_0^2 \tag{60}$$

$$\mathbf{s} \wedge \ddot{\mathbf{s}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = \frac{\alpha q}{m} \left[\frac{\dot{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{s}\|} - \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}})}{\|\mathbf{s}\|^3} \right] = \frac{\alpha q}{m} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \right)$$
(61)

$$(\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}\|^2 = constante$$
 (62)

$$\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}} = \frac{\alpha q}{m} \, \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \mathbf{d} \tag{63}$$

où \mathbf{d} est un vecteur constant et v_0 la vitesse initiale.



Les vecteurs $\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{s}}$ et $\mathbf{s}/||\mathbf{s}||$ étant de normes constantes, le mouvement n'est possible que sur une surface conique circulaire d'axe passant par l'origine et parallèle à \mathbf{d} (Fig. 7).

Prenons des coordonnées cylindriques dont l'axe des z est dans la direction de **d**. Nous obtenons, h et k étant deux constantes déterminées par les conditions initiales,





En général, il existe une valeur minimale r_{\min} de r où la vitesse radiale change de signe (Fig. 8). La trajectoire est esquissée à la Fig. 9. Lorsque la particule s'approche de la région de champ magnétique intense au voisinage du pôle magnétique O, elle est décélérée et finalement réfléchie.



Enfin, aux mouvements autour et le long des lignes de champ, se superpose encore un mouvement de *dérive* des charges électriques dans la direction azimutale, à travers les lignes de champ. En effet, considérons, pour simplifier, le mouvement d'un électron dans le plan de l'équateur géomagnétique. Au cours de sa gyration autour des lignes de champ, l'électron traverse des zones d'intensités différentes de *B*. L'induction magnétique est effectivement plus importante dans la partie de la trajectoire la plus proche de la terre. Dès lors, le rayon de courbure de la trajectoire, *i.e.* le rayon de Larmor, y est plus petit que dans la portion extérieure de la trajectoire. Au terme d'une rotation complète, l'électron subit donc une dérive vers l'est (Fig. 10). Inversement, les particules chargées positivement sont entraînées vers l'ouest. Le déplacement dans des sens opposés des charges électriques positives et négatives s'assimile donc à un véritable courant électrique autour de la Terre.

Un électron de basse altitude de 1 MeV effectue ainsi le tour complet de la terre en une dizaine de minutes. Un proton de basse altitude de 10 MeV met quant à lui de l'ordre de 3 minutes pour tourner autour de la terre. Cette dérive, associée au deux autres composantes du mouvement, entraîne la création d'une véritable coquille appelée *ceinture de radiation* (Fig. 11).



FIG. 10



Fig. 11

On peut étudier analytiquement le mouvement complet d'une particule chargée (électron) dans le champ magnétique dipolaire terrestre. En coordonnées cylindriques (l'axe des z coïncidant avec l'axe de symétrie du champ et le plan z = 0 étant celui de l'équateur géomagnétique) l'induction est donnée par (37). Si on assimile les particules chargées à des points matériels de masse m et de charge q < 0 et que l'on considère comme négligeables les forces non électromagnétiques, l'équation de Newton prend la forme

$$\ddot{\mathbf{s}} = -\frac{q}{m} \mathbf{B} \wedge \dot{\mathbf{s}} \tag{67}$$

soit, en coordonnées cylindriques,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{kq}{m} \frac{r^2 - 2z^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} r\dot{\theta}$$
(68)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{kq}{m}\frac{\dot{r}(2z^2 - r^2) - 3rz\dot{z}}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
(69)

$$\ddot{z} = -\frac{kq}{m} \frac{3r^2 z\dot{\theta}}{(r^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$
(70)

On a aussi l'intégrale première

$$\|\dot{\mathbf{s}}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = v_0^2 \tag{71}$$

obtenue en multipliant l'équation (67) scalairement par $\dot{\mathbf{s}}$. Nous pouvons mettre ces équations sous forme non dimensionnelle en prenant v_0 comme vitesse de référence et

$$\ell = \sqrt{\frac{-kq}{mv_0}} \tag{72}$$

comme longueur de référence. Définissant

$$\rho = \ell^{-1} r \qquad \zeta = \ell^{-1} z \qquad \tau = v_0 \ell^{-1} t$$
(73)

et désignant les dérivées par rapport à τ par °, nous obtenons

$$\overset{\circ\circ}{\rho} - \rho \overset{\circ}{\theta}^{2} = \frac{(\rho^{2} - 2\zeta^{2})\rho \overset{\circ}{\theta}}{(\rho^{2} + \zeta^{2})^{\frac{5}{2}}}$$
(74)

$$\frac{d}{d\tau}(\rho^2 \mathring{\theta}) = \frac{\rho \mathring{\rho}(2\zeta^2 - \rho^2) - 3\rho^2 \zeta \mathring{\zeta}}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\rho^2}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$
(75)

$$\overset{\circ\circ}{\zeta} = \frac{3\rho^2 \zeta \overset{\circ}{\theta}}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{5}{2}}}$$
(76)

$${}^{\circ}{}^{2} + {\rho}^{2} {}^{\circ}{}^{0}{}^{2} + {}^{\circ}{}^{2}{}^{2} = 1$$
 (77)

On en tire une seconde intégrale première

$$\rho^2 \overset{\circ}{\theta} = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + 2c \tag{78}$$

où c est une constante d'intégration dépendant des conditions initiales. Comparant les équations (77) et (78), on voit immédiatement que les conditions

$$-1 \le \frac{\rho}{(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2c}{\rho} \le 1$$
(79)

doivent être satisfaites.

Les équation (74), (75) et (76) admettent des solutions $\zeta = 0$. Celles-ci correspondent à des trajectoires équatoriales.

Pour ces trajectoires, les intégrales premières (77) et (78) deviennent

$$\overset{\circ}{\rho}^2 + \rho^2 \overset{\circ}{\theta}^2 = 1 \tag{80}$$

$$\rho^2 \ddot{\theta} = 2c + \rho^{-1} \tag{81}$$

On en tire

$$\rho^4 \overset{\circ}{\rho}^2 + \varphi(\rho) = 0 \tag{82}$$

avec

$$\varphi(\rho) = -(\rho^2 - 2c\rho - 1)(\rho^2 + 2c\rho + 1)$$
(83)

Faisant usage de la relation

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau}$$
(84)

on en déduit l'équation différentielle de la trajectoire

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -\frac{\varphi(\rho)\,\rho^2}{(1+2c\rho)^2}\tag{85}$$

Le mouvement n'est possible que si φ est négatif. Les zéros de φ sont donnés par

$$\rho_1 = c - \sqrt{c^2 + 1} \qquad \rho_3 = -c - \sqrt{c^2 - 1} \\
\rho_2 = c + \sqrt{c^2 + 1} \qquad \rho_4 = -c + \sqrt{c^2 - 1}$$
(86)

D'autre part, $\overset{\circ}{\theta}$ s'annule pour $\rho = \rho_5 = -(2c)^{-1}$. Nous pouvons distinguer les cas suivants :

i.
$$c < -1$$

 ρ_1 est réel négatif. ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 et ρ_5 sont réels positifs.



Le diagramme de $\varphi(\rho)$ a l'allure esquissée à la figure 12. Le mouvement est possible entre ρ_2 et ρ_3 et pour $\rho > \rho_4$. Entre ρ_2 et ρ_3 , le mouvement est borné et la vitesse angulaire change périodiquement de signe. Au-delà de ρ_4 , la trajectoire est ouverte (Fig. 13). Selon leur énergie, les particules ne peuvent donc se rapprocher de la Terre ou au contraire sont piégées dans un mouvement de gyration.





iii. -1 < c < 0

 ρ_1 est réel négatif. ρ_2 est réel positif. ρ_3 et ρ_4 sont complexes. ρ_5 est réel positif.







iv. c = 0

$$\rho_1 = -1 ; \quad \rho_2 = 1 ; \quad \rho_5 = \infty ; \quad \rho_3 = -i ; \quad \rho_4 = q$$

$$\frac{\rho_1 < 0 < \rho_2 < \rho_5}{\varphi - 0 + 1 + 0 - -}$$

Le diagramme de $\varphi(\rho)$ est semblable à celui de la figure 16 avec $\rho_2 = 1$.

L'équation (85) devient

$$d\theta = \frac{\pm d\rho}{\rho\sqrt{\rho^4 - 1}} \tag{88}$$

Posant

$$u = \sqrt{\rho^4 - 1} \tag{89}$$

on peut mettre l'équation différentielle de la trajectoire sous la forme

$$2\,d\theta = \pm \frac{du}{1+u^2}\tag{90}$$

Choisissant une orientation des angles θ et prenant $\theta = 0$ lorsque $\rho = 1$, on obtient, après intégration,

$$\rho^2 \cos 2\theta = 1 \tag{91}$$

Les trajectoires sont des hyperboles équilatères (Fig. 18).





Le diagramme de $\varphi(\rho)$ est esquissé à la figure 19. Le mouvement n'est possible que pour $\rho \ge \rho_2$. La trajectoire est ouverte (Fig. 20).



Mouvement dans un plan méridien.

Examinons maintenant d'éventuelles solutions $\theta = \text{constante. Dans ce cas,}$ les équations (74), (76) et (77) se réduisent à

$$\overset{\circ\circ}{\rho} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \overset{\circ}{\rho}_0 \tau + \rho_0 \tag{92}$$

$$\overset{\circ\circ}{\zeta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \zeta = \overset{\circ}{\zeta}_0 \tau + \zeta_0$$
(93)

$$\overset{\circ}{\rho}^2 + \overset{\circ}{\zeta}^2 = 1 \tag{94}$$

L'intégrale première (78) devient, quant à elle,

$$\rho^2 + 2c(\rho^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{95}$$

Celle-ci ne peut être satisfaite que si $c \leq 0$. On montre, en utilisant les équations écrites précédemment, que seule l'égalité c = 0 est acceptable. En effet, si $c \neq 0$ on peut écrire

$$\zeta = f(\rho)$$
 et donc $\mathring{\zeta} = \frac{df}{d\rho} \mathring{\rho}$ (96)

où la forme de $f(\rho)$ n'est pas compatible avec (94).

Les seules solutions possibles correspondent à c = 0 et donc à un mouvement de translation à vitesse constante le long de l'axe z

$$\rho = 0 \quad ; \quad \zeta = \pm \tau + \zeta_0 \tag{97}$$

Ce résultat était attendu. En effet, tout mouvement dans un plan méridien donne naissance à une composante de la force de Lorentz perpendiculaire à ce plan sauf si la vitesse est parallèle à l'induction. Dans ce cas, la particule suit les lignes de champ et n'est soumise à aucune force. Ceci n'est évidemment possible que si les lignes de champ sont rectilignes et donc seul l'axe z peut être parcouru de cette façon.

Cas général.

Dans le cas général, les conditions (79) définissent les régions du plan ρ, ζ où le mouvement est possible. Celles-ci sont déterminées par les deux conditions

$$\rho^2 + 2c\rho + n^3 \ge 0 \tag{98}$$

$$p^2 - 2c\rho - n^3 \ge 0 \tag{99}$$

où (Fig. 21)

$$n = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \cos\lambda \tag{100}$$

où λ est la latitude.



On peut à nouveau distinguer plusieurs cas :

i. $c \leq -1$

Les quatre racines sont réelles, trois d'entre elles sont positives. Il existe deux régions non connexes du plan ρ, ζ où le mouvement est possible (Fig. 22).



Fig. 22

Lorsque c tend vers -1, les points A et B se rapprochent. Ils coïncident à l'abscisse $\rho = 1$ pour c = -1.

ii. -1 < c < 0

Il existe un domaine continu de l'origine à l'infini où le mouvement est possible (Fig. 23).



iii. c = 0

Le domaine accessible inclut l'axe des ζ . C'est le seul cas où cette possibilité se présente.

iv. 0 < c

Il n'y a jamais qu'une seule racine réelle positive ou nulle. Il existe un domaine unique ne contenant pas l'origine où le mouvement est possible (Fig. 24).

4 La magnétosphère terrestre.

Le champ magnétique terrestre ne peut être décrit comme un champ dipolaire qu'au voisinage de la surface de la Terre. En effet, au-delà de quatre à cinq fois le rayon terrestre, le champ magnétique est fortement influencé par l'activité solaire.

4.1 Activité solaire.

Notre Soleil est une étoile ordinaire et calme, une des 10¹¹ étoiles de notre galaxie, la Voie Lactée. La proximité de la Terre rend cette étoile extrêmement importante pour nous puisqu'elle régit notamment la température de la surface de la Terre et de son atmosphère.

Le Soleil ne comporte pas une surface solide bien définie. La surface que nous observons dans le visible est communément considérée comme la surface solaire et est appelée *photosphère*. La température moyenne d'un corps noir équivalent à la photosphère vue de loin et considérée globalement est voisine de 5800K. Le diamètre de la photosphère est généralement considéré comme étant le diamètre du Soleil : 1,4 10^6 km. Ce diamètre englobe presque toute la masse solaire. Sous la photosphère, la matière est rapidement très opaque.

A l'exception des flux de neutrinos qui fournissent des données sur les réactions thermonucléaires du centre du Soleil et des oscillations radiales, seule l'atmosphère solaire est accessible à nos observations. Celles-ci mettent en évidence des perturbations qui engendrent des phénomènes d'une importance considérable au niveau de la Terre. Ainsi, voit-on fréquemment apparaître des *taches solaires*. Elles correspondent à des régions relativement froides puisque la portion centrale d'une tache solaire est voisine de 4000 K. Des champs magnétiques importants sont associés aux taches solaires (plusieurs milliers de fois le champ solaire moyen). Les taches solaires varient de 10^3 à 10^5 km en diamètre. Elles grandissent pendant quelques jours et durent entre une semaine et quelques mois. La fréquence des taches solaires définit le cycle d'activité solaire de 11 ans. L'enregistrement des taches solaires dure depuis plus de 300 ans et bien que les cycles ne présentent pas la même amplitude, la réalité de leur existence est sans ambiguïté (Fig. 25).





Les taches solaires donnent souvent naissance à des *éruptions solaires* qui se traduisent par une soudaine augmentation de brillance d'une petite région. Une éruption naît presque toujours dans le voisinage d'une tache. Elle se propage à travers l'atmosphère solaire à une vitesse de 100 à 1000 km/s et dure seulement quelques minutes. Les particules émises par les éruptions solaires sont surtout des protons et des particules alpha (noyaux d'hélium He^{++}). Des ions lourds sont aussi éjectés mais en plus petit nombre.

On observe qu'ne éruption importante près du limbe ouest du Soleil produira un flux de particules important au niveau de la Terre alors que si cette éruption apparaît près du limbe est, ce flux sera fort réduit. Un autre aspect du comportement temporel des éruptions est leur périodicité de 11 ans liée à celle des taches. La magnitude du pic du cycle futur n'étant pas connue, une incertitude sur l'intensité et le nombre des éruptions pour le prochain cycle existe toujours.

4.2 Le vent solaire.

Toutes énergies confondues, le Soleil perd 4 millions de tonnes de matière par seconde. C'est dans ce flux d'énergie que baigne la Terre.

En plus des particules provenant des éruptions solaires, la Terre est noyée en permanence dans un mélange d'ions et d'électrons provenant de la portion la plus extérieure du Soleil appelée la *couronne solaire*. Ce milieu peu dense et bon conducteur constitue un *plasma* et est appelé le *vent solaire*.

La découverte du vent solaire est relativement récente puisqu'elle a été réalisée en 1951 par Biermann qui a interprété le dédoublement des queues cométaires par une interaction avec le vent solaire.

Le vent solaire constitue une véritable extension de la couronne solaire conditionnant l'état d'ionisation, la densité et le champ magnétique dans une zone qui, dans la Voie Lactée, peut être considérée comme la zone d'influence du Soleil : *l'héliosphère*. Bien que les limites de l'héliosphère n'aient pas encore été observées (elle est supposée être un globule de 100 unités astronomiques², de rayon alors que les sondes les plus éloignées ont atteint à peine 70 U.A.), la galaxie doit être constituée d'autant de globules similaires qu'il y a d'étoiles, ces globules magnétiques échangeant de la matière à leur périphérie.

Comme la conductivité du plasma est extrêmement élevée, toute perturbation du champ magnétique à l'intérieur de celui-ci est immédiatement compensée par l'apparition de courants induits qui, par la loi de Lenz, s'opposent très efficacement à cette perturbation. En conséquence, le champ magnétique est comme "gelé" dans le flux et le plasma transporte le champ avec lui dans l'espace.



Fig. 26

 $^{^21}$ U.A. = 149,6 $10^9~{\rm m}=$ rayon moyen de l'orbite terrestre

Les lignes de champ magnétique dans le vent solaire peuvent être, en première approximation, dessinées selon une spirale dans le plan de l'écliptique (Fig. 26). Cette spirale résulte de la composition de la vitesse radiale d'expansion du vent solaire et de la vitesse azimutale liée à la rotation du Soleil. La surface du Soleil tourne en effet autour d'un axe normal au plan de l'écliptique dans le même sens que les planètes. La période de rotation vue depuis la Terre est fonction de la latitude solaire car le Soleil ne tourne pas sur lui-même comme un corps solide. Ainsi, à l'équateur solaire, la période vaut approximativement 25 jours alors qu'aux pôles solaires, elle est voisine de 33 jours.

Au niveau de la Terre, la vitesse radiale moyenne v_r est d'environ 400 km/s alors que la vitesse azimutale est approximativement égale à $v_{\theta} = \Omega_S r$ où $r \approx 1,5 \, 10^{11}$ m est la distance Terre-Soleil et où Ω_S est la vitesse moyenne de rotation du Soleil. On a donc un angle caractérisé par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_r}{v_{\theta}} = \frac{4\ 10^5 \times 27 \times 86\ 400}{2\pi \times 1,5\ 10^{11}} \approx 1$$

ce qui conduit à un angle de l'ordre de 45°. L'amplitude du champ est de quelques nanoTesla (la moyenne étant de 5 à 6 nT alors que l'induction produite par la terre à 10 R_T est encore de l'ordre de 30 nT). Le sens du champ s'inverse régulièrement ; la durée moyenne entre 2 inversions étant de quelques jours. La durée d'une inversion peut être très courte, de l'ordre de quelques minutes à quelques heures. Lors d'une transition, le signe du champ est modifié mais l'amplitude reste approximativement constante. Les observations spatiales ont montré que ce comportement est typique du voisinage du plan écliptique et que, quand on s'éloigne du plan, le sens du champ reste constant. Toutes ces considérations observationnelles ont permis d'élaborer un modèle réaliste (Fig. 27) où les lignes de champ sont ouvertes au niveau d'un feuillet ondulé et changeant dont la position correspond grossièrement au plan écliptique. Selon que la Terre se trouve "au-dessus" ou "en-dessous" du feuillet, le sens du champ est inversé.



FIG. 27- Lignes de champ magnétique solaire déchirées par la feuille de courant du vent solaire.

Les propriétés du vent solaire varient de manière relativement organisée avec des périodes où le plasma est lent suivies de périodes où le plasma est rapide. Le plasma rapide rattrapant le plasma lent, ces deux plasmas interagissent dans le milieu interplanétaire. Les variations de vitesse sont considérables, entre 250 km/s et 800 à 1000 km/s. La densité moyenne des protons est légèrement inférieure à 10 particules/cm³.

Le vent solaire est virtuellement complètement ionisé. L'état d'ionisation des éléments correspond à une température de plasma de 1.500.000K. Le plasma s'éloignant du Soleil, les collisions deviennent rares et l'état d'ionisation ne varie plus.

4.3 Magnétosphère terrestre.

Le vent solaire étant un milieu très bon conducteur, il ne peut s'écouler librement au travers du champ magnétique terrestre. En effet, il en résulterait alors une modification du champ magnétique à l'intérieur du vent solaire à laquelle s'oppposerait immédiatement des courants induits tendant à rétablir la distribution initiale du champ au sein du plasma. Dès lors, le champ magnétique terrestre constitue un obstacle semiperméable au vent solaire dont l'intéraction fait apparaître une cavité qui dévie la plus grande partie du vent solaire. Cet obstacle baptisé *magnétosphère* se modifie en fonction de l'activité solaire, selon la vitesse et la densité du vent ainsi que des caractéristiques du champ magnétique interplanétaire (Fig. 28).



FIG. 28

Les différentes zones suivantes ont été identifiées (Fig. 29) :

- la zone où les lignes de champ sont fermées, c'est-à-dire, qu'elles retournent à la Terre comme celles d'un dipôle,
- la zone où les lignes de champ sont ouvertes; elles ne retournent pas à la Terre mais sont connectées au champ interplanétaire défini par le vent solaire,
- la queue magnétosphérique formée par les lignes de champ ouvertes dans la direction antisolaire,

- le feuillet neutre qui divise la queue en deux parties et est approximativement situé dans le plan équatorial magnétique près de la Terre et dans le plan écliptique loin de la Terre,
- la magnétopause est la frontière extérieure de la magnétosphère,
- la magnétogaine, région turbulente devant la magnétopause, où le vent solaire est fortement affecté par le champ géomagnétique,
- l'onde de choc située devant la magnétopause du côté du Soleil.

La magnétopause est la surface extérieure de la magnétosphère, c'est-à-dire, le lieu où la force du champ géomagnétique comprimé est contrebalancée par la force du plasma solaire. Le plasma solaire glisse à l'extérieur de la magnétopause et n'approche pas la Terre qui est ainsi relativement protégée des influences extérieures. La magnétosphère présente la forme générale d'un obus dont l'avant, vers le Soleil, se trouve à quelques 10 R_T de la Terre, alors que la queue magnétosphèrique s'étend au-delà de 60 R_T et probablement jusqu'à 1000 R_T , c'est-à-dire plus loin que l'orbite de la Lune. En cas d'activité solaire importante, la distance de la magnétopause à la Terre se réduit à 7 R_T .



FIG. 29- Structure de la magnétosphère.

Le vent solaire rencontrant la magnétosphère forme une onde de choc à l'avant de la magnétopause. Ce front de choc est analogue aux chocs supersoniques devant des obstacles. L'avant du choc est situé à 15 R_T de la Terre, c'est-à-dire, quelques R_T en avant de la magnétopause, mais cette position varie beaucoup avec les conditions de vent solaire. Le front de choc résulte d'un comportement collectif du plasma. Ce comportement est analogue à celui du vent supersonique atteignant un obstacle mais l'analogie doit être envisagée avec prudence car la plupart des conditions qui conduisent à l'existence d'une onde de choc dans un flux supersonique sont absentes. C'est ainsi que les collisions entre molécules, indispensables à l'existence d'une onde de choc classique, sont remplacées par des interactions entre particules ionisées et champ magnétique. Le front de choc est dû, non pas aux collisions aérodynamiques mais aux interactions électromagnétiques entre le vent solaire magnétisé et la magnétosphère.

Au nez du front de choc, la vitesse décroît d'un facteur 4, tandis que la densité augmente du même facteur.

La zone entre le front de choc et la magnétopause est la magnétogaine. C'est une région où le champ est distordu et où circule un plasma très irrégulier en température, densité et vitesse.

Les observations montrent que la queue magnétosphérique s'étend au-delà de l'orbite de la Lune et probablement au-delà de 1000 R_T même si les données sont très éparses et la structure n'est pas très stable. La magnétopause n'est pas une surface imperméable et des observations montrent que des particules représentant 0,1 % de la masse et de l'énergie incidentes sur l'avant de la magnétosphère y pénètrent. Ces particules créent un courant allant de l'aube vers le crépuscule, près du plan équatorial.

Au voisinage de chacun des pôles, on remarque l'existence de régions étroites qui séparent les lignes de champ fermées côté Soleil des lignes de champ ouvertes côté antisolaire. Ce sont les *cornets polaires*.

4.4 Ceintures de radiation de Van Allen.

L'étude du mouvement d'une particule chargée dans le champ magnétique dipolaire terrestre fait apparaître la possibilité de piégeage des particules dans des zones toroïdales entourant la Terre; les particules chargées étant entraînées dans un triple mouvement de gyration autour des lignes de champ, d'oscillation entre les deux points miroirs et de dérive autour de la Terre. Dans la magnétosphère réelle, de telles régions de confinement des particules chargées existent effectivement, ce sont les *ceintures de radiation de Van Allen*.

Les ceintures de radiation de Van Allen sont constituées d'électrons, de protons et d'ions. Elles furent découvertes en 1958 par Van Allen au moyen de compteurs Geiger placés sur les satellites Explorer I et III. Les ceintures de Van Allen comprennent des électrons jusqu'à quelques MeV et des protons jusqu'à quelques centaines de MeV.

Différentes missions spatiales ont permis de déterminer la distribution du flux de particules chargées exprimé en nombre de particules qui traversent par seconde un détecteur sphérique de 1 cm². La forme des ceintures est représentée sur les figures 30 et 31 par les courbes isoflux. Elles montrent clairement que les tores suivent les

lignes du champ dipolaire. La ceinture d'électrons s'étend jusqu'à près de 10 rayons terrestres, bien au-delà de l'orbite géostationnaire. La frontière extérieure des régions de confinement est située là où le champ magnétique n'est plus capable de contenir les particules. La frontière interne est déterminée par l'atmosphère de la Terre.



FIG. 30 - Contours isoflux $(p^+/cm^2 s)$ de protons d'énergie supérieure à 1 MeV .



FIG. 31 - Contours isoflux $(e^{-}/\text{cm}^{2} \text{ s})$ d'électrons d'énergie supérieure à 0.5 MeV.

Les distributions moyennes présentées sur les figures 30 et 31 résultent de l'équilibre entre les mécanismes de création et de disparition des particules chargées.

4.4.1 Ceinture interne de radiation.

La ceinture de protons formant la *ceinture interne de radiation* doit son existence à l'efficacité du piégeage des protons au voisinage de la Terre. Les protons qui la constituent sont produits par l'interaction du rayonnement cosmique avec les noyaux de la haute atmosphère terrestre. Le rayonnement cosmique est cependant de relativement faible intensité. Ce n'est donc que par l'accumulation de particules pendant de très longues périodes de temps que la ceinture interne de radiation a pu atteindre le niveau élévé d'énergie qui est le sien.

> La découverte du rayonnement de particules d'origine galactique, observé pour la première fois par Hess, date de 1911. Ce rayonnement a été baptisé "rayons cosmiques" par Millikan et le nom est resté. Le comportement du rayonnement galactique particulaire a pu être analysé par des méthodes indirectes sur une durée de plusieurs milliers d'années sans que des variations significatives ne soient détectées. Il consiste en un faible flux de particules (4 particules/cm²s), de très haute énergie (10² à 10¹² MeV), qui semble distribué isotropiquement dans la galaxie. On trouve dans sa composition 87 % de protons, 12% de particules alpha et le 1% restant est constitué de noyaux d'atomes complètement ionisés. Cette dernière composante revêt, de par sa nature, une grande importance car elle constitue peut-être le seul échantillon de matière qui nous parvienne d'en dehors du système solaire. L'origine de ce rayonnement reste encore une énigme car on ne peut pas identifier les sources d'émission cependant il est sûr que les noyaux ne proviennent pas du système solaire.

> Les particules, d'abord accélérées sont ensuite déviées par les champs magnétiques galactiques. Si toutes les étoiles étaient aussi peu actives que notre Soleil, le flux galactique serait 6 ordres de grandeur plus faible que celui qu'on mesure actuellement. L'origine du rayonnement cosmique doit donc être recherchée dans des phénomènes très fortement dissipateurs d'énergie (novae, supernovae,...). Quand ces particules très énergétiques interagissent avec l'atmosphère terrestre, elles produisent des avalanches de particules secondaires : mésons, neutrons, électrons, photons, etc... Ce rayonnement est extrêmement pénétrant et malgré la protection apportée par l'atmosphère estimée équivalente à 10 m d'eau, les particules secondaires peuvent arriver au sol.

Le rayonnement cosmique est constitué d'ions positifs très peu nombreux mais voyageant à de très grandes vitesses. Ceux-ci remplissent probablement tout l'univers et bombardent la Terre. Lorsqu'ils entrent en collision avec les noyaux des gaz atmosphériques, ils sont capables de scinder ceux-ci en libérant, entre autres, des neutrons. N'étant porteurs d'aucune charge électrique, ces neutrons ne sont pas influencés par le champ magnétique terrestre et s'échappent dans l'espace à des vitesses importantes. Cependant, les neutrons libres sont radioactifs et, au bout d'un temps moyen de 12 minutes, ils se transforment en un proton, qui absorbe la plus grande partie de l'énergie initiale, un électron et un neutrino (une particule sans charge électrique ni masse). Pendant le temps qui précède leur transformation, la plupart des neutrons libres ont le temps de quitter le voisinage de la Terre. Seule une petite partie des neutrons libres se désintègre au sein du champ magnétique terrestre. Les protons qui résultent de cette transformation sont alors piégés dans la ceinture interne de radiation.

La désintégration d'un neutron libre donne aussi naissance à un électron. Cependant, celui-ci ne possède qu'une faible fraction de l'énergie initiale du neutron. Dès lors, bien que l'on observe également un maximum relatif du flux d'électrons à une distance de l'ordre de 1.5 à 3 R_T , l'intensité de cette ceinture interne d'électrons est bien inférieure à celle de la ceinture de radiation formée par les protons.

Notons encore que des ceintures internes artificielles ont été créées lors d'expériences d'explosions de bombes atomiques en haute altitude, américaines (Argus, Starfish) et soviétiques. Ces expériences ont montré une stabilité des électrons piégés sur des durées allant de quelques semaines à plusieurs années.

4.4.2 Ceinture de radiation externe.

Les électrons formant la ceinture de radiation externe ont une toute autre origine. En effet, cette ceinture centrée sur 5 R_T et s'étendant jusqu'à une distance de 12 R_T est surtout alimentée par du plasma d'origine solaire en provenance de la queue de la magnétosphère.

De temps en temps, lors de perturbations importantes du champ magnétique connues sous le nom d'orages magnétiques, la queue de la magnétosphère est fortement déformée. Un champ électrique transitoire très intense communique un énergie plus importante aux particules du plasma solaire et les entraîne vers la Terre. Lorsque l'orage magnétique cesse et que le champ électrique disparaît, ces particules, essentiellement des électrons et des ions, se retrouvent piégées dans le champ magnétique terrestre où elles participent à la ceinture externe de radiation.

Tandis que la ceinture interne est caractérisée par sa grande stabilité, la ceinture externe est en continuel changement. Tôt ou tard, les particules sont perdues, par exemple, par collision avec les gaz raréfiés de la très haute atmosphère. D'autre part, de nouvelles particules sont fréquemment injectées depuis la queue magnétosphérique.

4.5 Aurores polaires.

La durée du piégeage dans les ceintures de Van Allen est très variable. En particulier, les particules formant la ceinture interne de radiation se perdront si leurs points miroir sont situés à l'intérieur de l'atmosphère, c'est-à-dire en-dessous de 100 km d'altitude. C'est le cas quand le vecteur vitesse est peu incliné par rapport aux lignes de champ.

La précipitation des particules chargées dans la haute atmosphère provoque l'ionisation de l'oxygène et l'azote atomiques. En se recombinant, ceux-ci émettent de la lumière dans des longueurs d'ondes rouges et vertes. Ce phénomène fascinant est connu sous le nom d'*aurore polaire* (Fig. 32 et Fig. 33).



Fig. 32

Les aurores peuvent prendre des formes diverses. Les plus impressionnantes évoluent en de vastes draperies changeantes et ondulantes révélant les lignes de force du champ géomagnétique. Le phénomène peut durer quelques minutes à toute une nuit. Le couplage entre les deux hémisphères de la Terre dû aux particules qui passent du nord au sud en quelques secondes est immédiatement apparent quand on compare les aurores boréales aux aurores australes. Ces aurores dansent de concert alors qu'elles sont distantes de 20.000 km.

L'entrée des particules chargées s'effectue par les cornets polaires. Aussi, les aurores polaires se forment essentiellement aux latitudes élevées $(65^{\circ} a 75^{\circ})$ et dessinent un "oval auroral" entourant l'axe du dipôle magnétique. En cas d'activité solaire importante, cependant, l'oval peut s'étendre jusqu'à nos latitudes. On a ainsi pu observer ce phénomène en Belgique au printemps 2000.



Fig. 33

Reprenant les notations de l'étude du mouvement d'une particule chargée dans le champ magnétique dipolaire terrestre, on peut aisément déterminer l'étendue de l'oval auroral.

En effet, lorsque c varie entre -1 et 0, la région \mathcal{R}_c où les conditions (98) et (99) sont satisfaites balaie l'extérieur de la surface \mathcal{R} d'équation

$$\rho = -1 + \sqrt{1 + n^3} \tag{101}$$

L'intersection de la surface \mathcal{R} et de la Terre détermine la limite des régions dans lesquelles une particule électrisée venant de l'infini peut rencontrer la Terre.

L'équation de la surface terrestre est

$$\rho^2 + \zeta^2 = \mu^2 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \rho = n\mu \\ \zeta = \pm \mu \sqrt{1 - n^2} \end{cases}$$
(102)

оù

$$\mu = \frac{R}{\ell} \tag{103}$$

et où R est le rayon de la Terre.

L'intersection des surfaces définies par les équations (101) et (102) fournit la relation

$$2\cos\lambda = \mu^2 + \sqrt{\mu^4 + 8\mu} \tag{104}$$



Les régions recherchées sont par conséquent deux calottes sphériques d'axe Oz et de demi-angle au centre $\frac{\pi}{2} - \lambda$ (Fig. 34).

La formule (104) détermine ainsi les régions de la Terre où peut être observée l'entrée particulièrement spectaculaire de ces particules chargées dans l'atmosphère terrestre. Ces régions sont d'autant plus étendues que μ est grand c'est-à-dire que la vitesse des particules est grande (Fig. 35).



5 Activité solaire et activité humaine.

Comme on l'a montré, le champ magnétique terrestre est fortement influencé par le vent solaire et, plus largement, par l'activité solaire. Le champ magnétique terrestre interagit avec le plasma du vent solaire pour protéger l'environnement terrestre de l'agression des particules chargées. Cette protection n'est cependant pas absolue. Un grand nombre de phénomènes terrestres sont en effet liés aux éruptions solaires et aux orages magnétiques qui y sont associés : aurores polaires, perturbations des télécommunications et de la distribution électrique, courants induits dans les pipe-lines induisant une corrosion, etc... En particulier, les forts courants électriques associés aux orages magnétiques induisent le survoltage des grands transformateurs et des lignes à haute tension avec, pour conséquence, de gigantesques pannes électriques. C'est ainsi qu'une grande partie de l'État de New York s'est retrouvée paralysée pendant plusieurs heures en 1978. Pour la même raison, six millions de québécois ont été privés d'électricité pendant une dizaine d'heures le 13 mars 1989. On sait aussi que les orages magnétiques perturbent la propagation des ondes hertziennes et les systèmes de communication à l'échelle de la Terre.

Les radiations qui sont émises à l'occasion de l'éruption constituent également un danger majeur des voyages spatiaux interplanétaires, aussi bien pour les hommes que pour l'électronique embarquée. En effet, l'éruption est capable d'accélérer des particules jusqu'à des énergies considérables correspondant à une température qui peut atteindre 210⁷ K pendant des durées allant de 1 à 100 minutes. Dès lors, les occupants des missions spatiales habitées doivent impérativement être protégés des orages magnétiques lors des missions de longue durée.

Les satellites également doivent recevoir une protection appropriée pour faire face à cet environnement hostile. On compte à ce jour une cinquantaine de satellites endommagés par les orages magnétiques. De façon marquante, on constate d'ailleurs qu'une proportion importante des pannes se produisent au niveau de l'Atlantique Sud, là où la diminution du champ magnétique terrestre évoquée dans la section 3.2 s'accompagne d'un abaissement de la ceinture de radiation et où les trajectoires des satellites sont amenées à traverser les zones de Van Allen.

A l'inverse, le vent solaire est relativement peu dangereux car il correspond à des énergies faibles permettant un blindage facile.

6 Bibliographie.

- Boudenot Jean-Claude (1995). L'environnement spatial, Collection Que sais-je?, n° 3032, Presses Universitaires de France, 125 pp.
- Cowling (1957). Magnetohydrodynamics, Interscience, New York.
- Delcourt J.-J. (1990). Magnétisme terrestre Introduction, Masson Editeur, 316 pp.
- Delhez Eric J.M. (1999). Analyse Mathématique, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, Centrale des Cours de L'A.E.E.S., 408pp.
- Delhez Eric J.M. et Nihoul Jacques C.J. (1996). Mécanique rationnelle. Modèle mathématique de Newton, E. Riga Editeur, 299pp.
- Jamar Claude (1999). Environnement et contraintes des missions spatiales, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, notes de cours.
- Nihoul Jacques C.J. (1984). *Hydrodynamique II, Magnétohydrodynamique*, E. Riga Editeur, 179pp.
- Rochus Pierre (1999). Conception d'expériences spatiales, Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège, notes de cours.

Quelques adresses sur Internet pour en savoir plus.

Source d'informations générales : http://www.thursdaysclassroom.com/

La Terre, l'aimant géant : http://istp.gsfc.nasa.gov/earthmag/demagint.htm

Sur la magnétosphère :

http://www.sel.noaa.gov/index.html http://www-spof.gsfc.nasa.gov/Education/Intro.html http://ssdoo.gsfc.nasa.gov/education/lectures/magnetosphere.html http://leonardo.unh.edu/ggs/Education/Intro.html http://istp.gsfc.nasa.gov/earthmag/ http://physicsweb.org/article/news/4/5/4 http://physicsweb.org/article/news/4/5/4 http://pao.gsfc.nasa.gov/gsfc.html http://pao.gsfc.nasa.gov/gsfc.html (Site officiel de GSFC) http://www.nasa.gov/ (Site officiel de la NASA) http://swing.ms.u-tokai.ac.jp/aaindex/explore/Intro.html

Sur le soleil :

http://sohowww.nascom.nasa.gov/explore/ http://hesperia.gsfc.nasa.gov/sftheory/

Interactions du vent solaire avec la magnétosphère : http://dec1.npi.msu.su/~alla

7 Remerciements.

Les auteurs remercient Véronique Rochus et Olivier Absil pour la réalisation d'une partie des figures.

Ils tiennent également à associer à ce projet l'ensemble des étudiants ingénieurs civils de seconde candidature qui ont suivi le cours pivot durant l'année académique 1999-2000.