Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2023

# MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2

## ÉVALUATION FORMATIVE

*Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.*
*Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.*

### Question I

Étudiez la convergence des séries numériques suivantes.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,2^k}{7^k}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)\ln^2 k}{k^2}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right)$

### Question II

On considère la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-1)^k+\ln k}$$

i. Étudiez la convergence absolue de cette série.

ii. Cette série vérifie-t-elle les hypothèses du critère de convergence des séries alternées ? Que peut-on conclure de cette vérification ? Justifiez.

### Question III

La fonction d'erreur est définie par

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

i. Déterminez une expression de $\operatorname{erf}(x)$ en série de puissances de $x$. Justifiez les opérations effectuées.

ii. Déterminez une valeur approchée de $\operatorname{erf}(1)$ avec une erreur maximale de $10^{-2}$. Justifiez.

### Question IV

i. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ entraîne-t-elle celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ ? Justifiez.

ii. Si $f_k \overset{\mathtt{I}}{\rightrightarrows} f$, peut-on en déduire la majoration uniforme des $f_k$ sur $\mathtt{I}$, *i.e.* l'existence d'une constante $C > 0$ et d'un entier $N > 0$ tels que, pour tout $k > N$ et pour tout $x \in \mathtt{I}$ on a $|f_k(x)| \leq C$ ? Justifiez.

SOLUTION TYPE

## Question I

i. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,2^k}{7^k}$ est à termes positifs. L'application du critère du quotient conduit à considérer

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} \frac{2^{k+1}}{2^k} \frac{7^k}{7^{k+1}} = \frac{2}{7} \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{7} < 1$$

La série est donc convergente.

*Série à termes positifs : 1 pt*
*Application correcte d'un critère permettant de conclure : 2 pts*
*Conclusion correcte : 1 pt (OK si convergence absolue)*

*Total i. : 4 pts*

ii. La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2}$ est à termes positifs.

On a

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}} = o\left(\frac{1}{k^{5/4}}\right),\ (k \to +\infty)$$

puisque $\ln^2 k = o(k^{1/4})$ au voisinage de l'infini.

La série est donc convergente.

*Série à termes positifs : 1 pt*
*Application correcte d'un critère permettant de conclure : 2 pts*
*Conclusion correcte : 1 pt (OK si convergence absolue)*

*Total ii. : 4 pts*

iii. La série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est alternée puisque $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right) > 0, \forall k \geq 1$.

Elle converge absolument puisque, tenant compte de ce que $\operatorname{sh} x \sim x$, $(x \to 0)$,

$$|u_k| = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2},\ (k \to +\infty)$$

*Série pas à termes positifs (mention de alternée pas nécessaire) : 1 pt*
*Application correcte d'un critère permettant de conclure : 2 pts*
*Conclusion correcte : 1 pt*

*Total iii. : 4 pts*
*NB : max 2 pts si semi-convergence*
TOTAL QI :12 PTS

*Pour les item i. et ii., point de la série à termes postitifs aussi accordé si l'étudiant ne mentionne pas cet élément mais applique le critère en prenant explicitement le module ($|u_k|$) du terme général.*

*Pour les item ii. et iii., 1 pt accordé si seulement application correcte du critère du quotient ou de la racine (ne permettant pas de conclure).*

## Question II

Soit la série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-1)^k + \ln k}$$

i. Vu que $(-1)^k + \ln k > 0$, $\forall k \geq 2$, le terme général $u_k$ de la série est tel que

$$|u_k| = \frac{1}{(-1)^k + \ln k}$$

*Identification de la série des modules : 2 pts dont 1 pt pour la justification du signe donnée ici ou au point ii.*

*Application correcte d'un critère permettant de conclure : 2 pts*

On a

$$|u_k| \sim \frac{1}{\ln k}, \quad (k \to +\infty)$$

de sorte que

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{1}{(-1)^k + \ln k}\right), (k \to +\infty)$$

Dès lors, la série des $|u_k|$ diverge et la série proposée ne converge pas absolument. *Conclusion correcte : 1 pt*

*Attribution d'un point en cas d'application correcte du critère du quotient ou de la racine (ne permettant pas de conclure).*

*Total i. : 5 pts*

ii. La série est alternée puisque son terme général peut s'écrire $u_k = (-1)^k v_k$ avec *Série alternée : 1 pt*

$$v_k = \frac{1}{(-1)^k + \ln k} > 0, \quad \forall k \geq 2$$

On a aussi *$\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 0$ : 1 pt*

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(-1)^k + \ln k} = 0$$

Cependant, $v_k$ ne tend pas monotonément vers 0. En effet, pour toute valeur de $k$ paire, la condition de décroissance $v_{k+1} \leq v_k$ s'écrit *Décroissance non monotone : 3 pts (dont 1 pt pour la justification)*

$$\frac{1}{\ln(k+1) - 1} \leq \frac{1}{\ln k + 1} \qquad \text{soit} \qquad \ln \frac{k}{k+1} \leq -2$$

qui n'est pas vérifiée pour $k > 1/(\mathrm{e}^2 - 1)$. *Conclusion : 1 pt*

En conclusion, la série donnée ne vérifie pas les hypothèses du critère de convergence des séries alternées. Ce critère ne nous apporte donc aucune information sur la convergence de la série qui pourrait être semi-convergente ou divergente.

*Total ii. : 6 pts*

TOTAL QII :11 PTS

## Question III

i. En utilisant le résultat connu *Expression de $\mathrm{e}^{-t^2}$ en série de puissances : 3 pts, dont 1pt pour l'intervalle de convergence*

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

on peut écrire

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Comme toute série de puissances, cette série peut être primitivée terme à terme sur son intervalle de convergence, en l'occurrence $\mathbb{R}$, et la primitive obtenue garde le même intervalle de convergence. On peut donc écrire *Justification de la primitivation/intégration terme à terme : 1 pt*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^{2k} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

*Valeur de l'intégrale : 3 pts*

*Total i. : 7 pts*

ii. En utilisant le résultat du point i., on a

$$
\operatorname{erf}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}
$$

*Expression de erf(1) : 1 pt*

La série représentant $\operatorname{erf}(1)$ est une série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0. L'erreur absolue commise en l'assimilant à l'une de ses sommes partielles est donc inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé, soit

*Justification complète (avec le module du terme général qui tend monotonément vers 0) de la majoration de l'erreur : 1 pt*

$$
\left| \operatorname{erf}(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}
$$

*Expression générale (en fonction de n) de la majoration de l'erreur : 2 pts*

Pour $n = 2$, l'erreur est majorée par

$$
\frac{2}{7\sqrt{\pi}3!} = \frac{1}{21\sqrt{\pi}} \approx 0.027 > 0.01
$$

et, pour $n = 3$, on obtient

*Choix de n : 1 pt*

$$
\frac{2}{9\sqrt{\pi}4!} = \frac{1}{108\sqrt{\pi}} \approx 0.005 < 0.01
$$

L'erreur absolue est donc inférieure à $10^{-2}$ pour $n = 3$, *i.e.* lorsqu'on approche $\operatorname{erf}(1)$ par l'expression

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{0! \cdot 1} - \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \right) = \frac{52}{35\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

*Valeur approchée : 2 pts, dont 1 pt pour la valeur simplifiée. Une valeur décimale approchée avec deux décimales est aussi acceptée (voir commentaires sur les erreurs fréquentes).*

*Total ii. : 7 pts*

TOTAL QIII :14 PTS

Question IV

i. La propriété énoncée est fausse comme le montre le contre-exemple suivant. La série numérique de terme général

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général décroît monotonément vers zéro. Par contre, la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

est divergente.

*Pas de point accordé si réponse "Non" sans justification*
*Contre-exemple correct : 2 pt*
*Vérification de l'hypothèse : 1 pt*
*Négation de la thèse : 1 pt*

*Total i. : 4 pts*

ii. Non. De la convergence uniforme de la série des $f_k$ sur un intervalle $\mathtt{I}$, on ne peut déduire la majoration uniforme des $f_k$ sur cet intervalle. De façon triviale, la suite de fonctions définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{x}$$

converge uniformément vers la fonction $f(x) = 1/x$ sur $\mathtt{I} = ]0,+\infty[$ (puisque $f_k(x) - f(x) = 0$ sur $\mathtt{I}$ quel que soit $k$). Cependant, les fonctions $f_k$ ne sont pas bornées sur cet intervalle.

*Pas de point accordé si réponse "Non" sans justification*
*Traduction de l'énoncé en terme de convergence uniforme de la suite des $f_k$ : 1 pt.*
*Contre-exemple correct : 1 pt*
*Justification : 2 pts*
*Total ii. : 4 pts*

TOTAL QIV : 8 PTS

## Commentaires et erreurs les plus fréquentes

### Question I

Dans l'étude de la convergence des séries numériques, il convient de prendre en compte les considérations générales suivantes.

- Il faut distinguer les séries à termes positifs (items i. et ii.) des séries dont le signe du terme général est variable (item iii.) car les critères applicables sont différents. La première étape dans l'étude de la convergence d'une série numérique doit donc porter sur cette distinction entre séries à termes positifs et de signe variable.
- Les critères de comparaison, du quotient, de la racine et en $k^\alpha$ ne s'appliquent qu'à des séries à termes positifs. Si le terme général de la série n'est pas toujours positif, il faut appliquer le critère à la série des modules, ce qui permet, ici dans l'item iii., de justifier la convergence absolue de la série.
- Les séries à termes positifs convergentes ne sont généralement pas qualifiées "d'absolument convergentes". On réserve ce terme aux séries dont le terme général est de signe variable et qui convergent en module.
- Il ne faut pas confondre le critère de comparaison et le critère en $k^\alpha$. Même si les deux critères partagent la même idée de base (convergence si le terme général se comporte comme ou mieux que celui d'une série convergente et divergence si le terme général se comporte comme ou moins bien que celui d'une série divergente), les formalismes sont assez différents.
  Le critère en $k^\alpha$ se base sur le comportement asymptotique pour $k \to +\infty$ et utilise comme référence les séries de Riemann.
  Le critère de comparaison se base sur une majoration pour $k \geq N$ où $N$ est à déterminer et utilise comme référence n'importe quelle série à termes positifs ad-hoc.
- Que ce soit via le critère de comparaison ou le critère en $k^\alpha$, aucune conclusion ne peut être tirée si le terme général se comporte mieux que celui d'une série divergente ou moins bien que celui d'une série convergente.

Les commentaires suivants sont spécifiques aux trois séries numériques proposées.

i.
- Si la série est à termes positifs, il faut le préciser avant d'appliquer un critère réservé à ce type de séries.
- Le critère du quotient (voir solution-type) était tout à fait adapté à cette série à termes positifs. Le critère de la racine pouvait aussi être utilisé pour démontrer la convergence de la série. Son application demandait cependant de calculer

$$\lim_{k\to+\infty} k^{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{k}\ln k\right) = e^{0^+} = 1^+$$

  dont le résultat ne peut être donné sans justification.

ii.
- Si la série est à termes positifs, il faut le préciser avant d'appliquer un critère réservé à ce type de séries.
- La présence d'un logarithme dans le terme général de la série fait en sorte que celui-ci n'est pas asymptotique à une série de Riemann. On peut cependant raisonner en deux temps.
  D'abord, on note que

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}},\ (k \to +\infty)$$

  Ensuite, on remarque que, puisque $\ln k$, et donc $\ln^2 k$, sont négligeables à l'infini par rapport à n'importe quelle puissance positive de $k$, la présence du facteur $\ln^2 k$ au numérateur du membre de droite ne fait que réduire très légèrement la décroissance de celui-ci au voisinage de l'infini. Il est donc possible de trouver $\alpha \in ]1, 3/2[$ tel que

$$\frac{\ln^2 k}{k^{3/2}} = o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right),\ (k \to +\infty)$$

ce qui permet d'établir la convergence de la série proposée.
Cette intuition peut être précisée mathématiquement en écrivant

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}} = o\left(\frac{1}{k^{5/4}}\right),\ (k\to+\infty)$$

où on a utilisé $\ln^2 k = o(k^{1/4})$ au voisinage de l'infini. Remarquons que tout résultat du type $\ln^2 k = o(k^{\varepsilon})$ avec $0<\varepsilon<1/2$ pouvait être utilisé ici pour démontrer la convergence de la série.

- Rappelons qu'aucune conclusion ne peut être tirée si le terme général de la série est négligeable par rapport à celui d'une série de Riemann divergente. En particulier ici, considérer que $\ln^2 k = o(\sqrt{k})$ est bien sûr correct mais n'est d'aucune utilité car écrire

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}} = o\left(\frac{1}{k}\right),\ (k\to+\infty)$$

ne nous apprend rien puisque la série harmonique est divergente.

- Les notations "$\sim$"et "$=$" ne sont pas équivalentes. Il faut veiller à les utiliser correctement.
Pour caractériser le comportement asymptotique du terme général d'une série, on pourra par exemple écrire

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}},\quad (k\to\infty)$$

en ayant soin d'indiquer que ce comportement est valable au voisinage de l'infini. Par contre, l'écriture

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} \sim \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}}$$

est incomplète car elle n'indique pas dans quel voisinage les deux membres sont comparés l'un à l'autre. L'expression

$$\frac{(\sqrt{k}+1)\,\ln^2 k}{k^2} = \frac{\ln^2 k}{k^{3/2}},\quad (k\to\infty)$$

est aussi incorrecte car il n'existe pas de valeurs de $k$ pour lesquelles les deux membres sont égaux.

iii.
- La série donnée est alternée. Il faut donc commencer par en étudier la convergence absolue (convergence de la série des modules) par un critère adapté. La connaissance du comportement asymptotique du sinus hyperbolique au voisinage de 0 permet d'écrire

$$|u_k| = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2},\ (k\to+\infty)$$

et de conclure à la convergence absolue de la série, le module de son terme général se comportant comme celui d'une série de Riemann convergente.

- Les critères du quotient et de la racine sont beaucoup moins adaptés à la série donnée et ne permettent d'ailleurs pas de conclure puisque les limites calculées sont égales à $1^-$.
- Quand la limite calculée en appliquant le critère du quotient ou de la racine vaut 1, il est utile de savoir comment cette limite est approchée. En effet, on pourrait conclure en la divergence de la série si on arrivait à montrer que cette limite est vaut $1^+$. Ici, cependant, on peut montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k^2}\right)} = 1^- \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{k^2}\right]} = 1^-$$

ce qui ne permet pas de conclure.

Rappelons que l'application de l'Hospital ne conserve pas la façon dont les limites sont approchées. Ainsi, de

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{k^2}\right]} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]\cdot\frac{-2}{(1+k)^3}}{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{k^2}\right]\cdot\frac{-2}{k^3}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]}{\mathrm{ch}\left[\frac{1}{k^2}\right]} \frac{k^3}{(k+1)^3} = 1^- \cdot 1^- = 1^-$$

on ne peut déduire que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{(k+1)^2}\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{1}{k^2}\right]} = 1^-$$

Pour établir si la limite est égale à $1^-$ ou $1^+$, il faut impérativement étudier le comportement de la fonction apparaissant dans la limite initiale.

## Question II

i. 
- La série donnée n'est manifestement pas à termes positifs. Pour en étudier la convergence absolue, il faut commencer par calculer le module du terme général de la série, ce qui a posé problème à une majorité d'étudiants. On a

$$|u_k| = \left|\frac{(-1)^k}{(-1)^k+\ln k}\right| = \frac{1}{|(-1)^k+\ln k|} = \frac{1}{(-1)^k+\ln k}$$

  puisque, pour $k\geq 2$, $(-1)^k+\ln k>0$.
- La présence de $\ln k$ dans le module du terme général de la série conduisait naturellement à utiliser un critère en $k^\alpha$ pour répondre à la question posée. Le comportement du logarithme qui tend moins vite vers 0 à l'infini que toutes les puissances, et en particulier que $k$, indique que la série des modules diverge. Mathématiquement, on a

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{1}{(-1)^k+\ln k}\right),\ (k\to+\infty)$$

ii. 
- Les hypothèses du critère de convergence des séries alternées sont au nombre de trois.
  - ◇ Premièrement, la série doit être alternée et ceci doit être justifié par le fait que la terme général de la série est de la forme $u_k=(-1)^k v_k$ où $v_k$ est de signe constant, ce qui est bien le cas ici puisque

$$\frac{(-1)^k}{(-1)^k+\ln k} = (-1)^k v_k \quad \text{où} \quad v_k = \frac{1}{(-1)^k+\ln k} > 0,\ \forall k\geq 2$$

  - ◇ Deuxièmement, le terme général de la série doit tendre vers 0 quand $k$ tend vers l'infini, ce qui est bien sûr le cas aussi.
  - ◇ Et enfin, la décroissance de $|v_k|$ doit être monotone à partir d'un certain rang $N$. Cela signifie que $|v_k|\geq|v_{k+1}|$ quel que soit $k\geq N$. Cette dernière hypothèse n'est pas remplie comme le montre le raisonnement de la solution-type.
    Remarquons qu'il n'est pas équivalent d'étudier la décroissance monotone d'une fonction se comportant asymptotiquement à l'infini comme $|v_k|$.
    Remarquons également qu'un exemple basé sur des valeurs particulières de $k$ (comme $k=2$ et $k+1=3$) ne permet pas de justifier que $|v_k|$ ne décroit pas monotonément pour $k\geq N$ car cette décroissance monotone pourrait être vérifiée pour des valeurs de $k$ plus élevées.

- Puisque les hypothèses du critère de convergence des séries alternées ne sont pas remplies par la série, ce critère (qui ne constitue qu'une condition suffisante de semi-convergence) ne nous apporte aucune information sur la convergence de la série. Le raisonnement suivi ne permet donc pas de justifier la divergence de la série [1].

**Question III**

i.
- On sera attentif à éviter les erreurs de calcul. En particulier, on n'a pas
$$(-t^2)^k = -t^{2k} \quad \text{ni} \quad (-t^2)^k = (-t)^{2k}$$
mais bien
$$(-t^2)^k = (-1)^k t^{2k}$$
- Quand un résultat connu est utilisé pour obtenir la série de puissances représentant une autre fonction, il est indispensable de déterminer l'intervalle de convergence de celle-ci qui peut être différent de celui de la série utilisée. Ici, le développement de $\mathrm{e}^x$ est valable pour $x \in \mathbb{R}$. Celui de $\mathrm{e}^{-t^2}$ l'est donc pour $-t^2 \in \mathbb{R}$, soit $t \in \mathbb{R}$.
- Les opérations mathématiques effectuées doivent être justifiées en faisant appel aux résultats théoriques relatifs aux séries de puissances. En particulier ici, il fallait justifier la primitivation terme à terme de la série sur son intervalle de convergence.

ii.
- Le résultat théorique sur l'évaluation de l'erreur de troncature de la série n'est valable que pour une série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0. Il était donc indispensable de mentionner que l'on était bien dans le cadre d'application de ce résultat.
- De nombreux étudiants ont omis le facteur $2/\sqrt{\pi}$ multipliant la série représentant $\mathrm{erf}(1)$. Ceci conduit évidemment à des résulats numériques incorrects.
- Le raisonnement suivi pour établir une approximation de $x = \mathrm{erf}(1)$ et une majoration de l'erreur associée permet d'établir que
$$\mathrm{erf}(1) \in [\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon]$$
où
$$\tilde{x} = \frac{52}{35\sqrt{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \frac{1}{108\sqrt{\pi}}$$
Puisque $\varepsilon \leq 10^{-2}$, l'approximation $\tilde{x}$ rencontre bien la précision attendue.

  Les expressions exactes ci-dessus de $\tilde{x}$ et $\varepsilon$ doivent être préférées aux approximations décimales
$$\tilde{x} \approx 0.838224524 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon \approx 0.00522398$$
Si des expressions décimales sont utilisées, celles-ci doivent être introduites de façon cohérente. Compte tenu des attentes formulées dans l'énoncé, *i.e.* une précision de $10^{-2}$, on peut vouloir fournir une valeur décimale approchée avec 2 décimales de $\mathrm{erf}(1)$, soit 0.84. On a donc
$$\mathrm{erf}(1) = 0.84 \pm 0.01$$

1. Remarquons que la divergence de la série peut cependant bel et bien être établie en écrivant son terme général sous la forme
$$u_k = \frac{(-1)^k}{\ln k + (-1)^k} = a_k - b_k \qquad \text{où} \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{\ln k} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\ln^2 k + (-1)^k \ln k}$$
La série des $a_k$ est une série alternée dont la convergence peut être aisément démontrée par le critère habituel. La série des $b_k$ est à termes positifs et est divergente puisque
$$a_k \sim \frac{1}{\ln^2 k} \qquad \text{de sorte que} \quad \frac{1}{k} = o(a_k), \quad (k \to \infty)$$
Dès lors, la série des $u_k$ ne peut converger.

Remarquons que cette expression est licite car

$$[\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon] \subset [0.83, 0.85]$$

et qu'on est donc assuré du fait que l'intervalle $[0.83, 0.85]$ contient la valeur exacte de $\text{erf}(1)$.

## Question IV

Quand on demande si une proposition est vraie, on ne veut pas savoir si celle-ci est vraie dans certains cas ni identifier ces cas particuliers. Il convient simplement d'affirmer si la proposition est toujours vraie ou ne l'est pas. Il faut répondre aux questions posées et ne pas perdre son temps à expliquer ce qui n'est pas demandé.

Quand un énoncé est vrai, il faut le démontrer de façon rigoureuse.

Pour démontrer qu'un énoncé est faux, il suffit par contre de donner une contre-exemple correct, c'est-à-dire vérifiant les hypothèses et ne vérifiant pas la thèse.

Les deux énoncés de cette question IV sont faux. La réponse aux questions posées devait être NON. Pour justifier cette réponse, il fallait chaque fois donner un contre-exemple. Expliquer pourquoi l'énoncé ne doit pas être toujours vrai sans donner d'exemple précis ne suffit pas.

Par exemple, dans l'item i, dire qu'une série alternée pourrait être semi-convergente et la série des carrés diverger ne suffit pas si rien ne vient étayer cette affirmation. Il faut prouver qu'une telle série existe en donnant un exemple précis.

Dans l'item ii, expliquer que la fonction $f$ vers laquelle converge la suite des $f_k$ pourrait être non bornée ne permet pas non plus de justifier complètement sa réponse. Encore faut-il donner un exemple de suite $\{f_k\}$ qui ne vérifie pas l'énoncé.

i.
- Rien n'est précisé sur le signe du terme général $a_k$ de la série. Il ne s'agit donc pas forcément d'une série à termes positifs. On n'a donc pas $a_k^2 < a_k$ pour $k$ suffisamment grand même si $a_k$ tend vers 0 en tant que terme général d'une série convergente. Par ailleurs, le critère de comparaison n'est d'aucune utilité ici puisqu'il ne peut s'appliquer qu'à des séries à termes positifs.
- La série donnée est dite convergente, pas absolument convergente. Si la série était absolument convergente, l'énoncé serait vrai car la série des $|a_k|$ à termes positifs convergerait et la relation $a_k^2 < |a_k|$ pour $k$ suffisamment grand permettrait, par comparaison, de conclure à la convergence de la série des $a_k^2$.
- Si $a_k \to 0$, cela implique évidemment que $a_k^2 \to 0$. Rappelons cependant qu'une série dont le terme général tend vers 0 n'est pas forcément convergente. Il s'agit d'une condition nécessaire de convergence, pas suffisante.
- Quand un contre-exemple est donné, il faut montrer qu'il vérifie les hypothèses et pas la thèse. En particulier, la convergence de la série des $(-1)^k/\sqrt{k}$ doit être justifiée par le fait qu'il s'agit d'une série alternée dont le module du terme général tend monotonément vers 0.
- Les critères de convergence des séries numériques à termes positifs ne sont que des conditions suffisantes de convergence. Si une série de terme général $u_k$ positif converge, on ne peut pas affirmer que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} < 1 \quad \text{ni que} \quad u_k = o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right),\ (k \to +\infty) \text{ avec } \alpha > 1$$

ii.
- Il faut pouvoir comprendre les notations mathématiques. En particulier, $f_k \overset{\mathtt{I}}{\Rightarrow} f$ signifie que la suite des fonctions $f_k$ converge uniformément sur l'intervalle $\mathtt{I}$ vers la fonction $f$.
  Il est bien question d'une suite de fonctions et pas d'une série puisqu'il n'y a pas de symbole $\sum$ et la double flèche indique la convergence uniforme.
- Dans l'énoncé, rien n'est précisé sur les fonctions $f_k$ qui ne sont donc pas forcément continues, ni sur l'intervalle $\mathtt{I}$ qui peut tout aussi bien être un intervalle ouvert qu'un intervalle fermé. Il ne faut pas inventer des hypothèses qui ne sont pas données.

- En partant de la définition de la convergence uniforme,

$$f_k \overset{\mathtt{I}}{\Rightarrow} f \quad \text{ssi} \quad (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

on montre sans problème que, $\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N$,

$$|f_k(x)| = |f_k(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f(x)| \leq \varepsilon + |f(x)|$$

Cependant, ceci ne garantit par l'existence d'une majoration uniforme des $f_k$ (pas plus que la possibilité de rendre les $f_k$ arbitrairement petit pour tout $k \geq N$) car rien n'indique que la fonction $f$ est bornée sur $\mathtt{I}$. L'énoncé semble donc faux et, pour le prouver, il suffit de donner un contre-exemple correct comme celui de la solution-type. D'autres contre-exemples moins triviaux rencontrés dans les copies conviennent aussi :

$$\{\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\} \text{ sur } ]0, +\infty[, \quad \{x + \frac{1}{k}\} \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \{e^x + \frac{1}{k^2}\} \text{ sur } \mathbb{R}$$

- Trop d'erreurs de manipulation des inégalités ont été constatées dans les tentatives de démonstration infructueuses. En particulier, on se souviendra que, de $a \leq b$ et $a \leq c$, on ne peut déduire que $b \leq c$ et que l'inégalité $|a - b| \leq |a| - |b|$ n'est pas correcte.