Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2018

ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures.

*Les copies seront reprises lors du cours théorique du **20 mars**.*

- ***Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Discutez, en fonction du paramètre réel $\beta \neq -1$, la convergence de la série définie par

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k^{\beta}}{\ln k}$$

Question II

i. En vous basant sur les résultats connus, établissez la représentation en série de puissances de la fonction $\arcsin x$ et déterminez son intervalle de convergence.

ii. Montrez que la série établie ci-dessus peut être écrite sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\, 2^{2k}\, (\gamma k+\delta)}\, x^{2k+1}$$

où γ et δ sont des constantes réelles à déterminer.

iii. Sachant que (Formule de Stirling)

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\, k^k\, \mathrm{e}^{-k}, \qquad (k \to \infty)$$

déterminez le plus grand ensemble $\mathtt{E} \subset \mathbb{R}$ sur lequel la série de puissances représente la fonction $\arcsin x$. Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

La série

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k^{\beta}}{\ln k}$$

étant de signe variable, sa convergence doit être étudiée en précisant quand la convergence est absolue.

i. On a

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k\, k^{\beta}}{\ln k} = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \leq 0 \\ \infty & \text{si } \beta > 0 \end{cases}$$

La série est donc divergente pour $\beta > 0$ puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

Divergence si $\beta > 0$: 2 pts, dont 1 pt pour la justification.

ii. Étudions la convergence absolue de la série pour $\beta \leq 0$.

- D'une part, on a

$$\frac{k^{\beta}}{\ln k} = \frac{1}{k^{-\beta}\, \ln k} = o\left(\frac{1}{k^{-\beta}}\right), \quad k \to \infty$$

La série est donc absolument convergente si $-\beta > 1$, c'est-à-dire si $\beta < -1$, puisque son terme général (en module) se comporte mieux que celui d'une série de Riemann convergente.

Convergence absolue si $\beta < -1$: 3 pts dont 1 pt pour le caractère absolu et 1 pt pour la justification.

- Le cas $\beta = -1$ (qui ne devait pas être envisagé ici) ne peut être traité qu'en utilisant le critère intégral (matière non vue au cours). On a

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{n\to\infty} \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^n = \lim_{n\to\infty} \ln|\ln n| - \ln|\ln 2| = \infty$$

De ce résultat, on peut conclure que la série ne converge pas absolument pour $\beta = -1$.

- D'autre part, si $\beta > -1$, on a

$$\frac{1}{k} = o\left(\frac{k^{\beta}}{\ln k}\right), \quad k \to \infty$$

puisque, dans ce cas,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{k^{\beta}/\ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k^{\beta+1}} = 0$$

La série ne converge donc pas absolument si $\beta > -1$ puisque son terme général (en module) se comporte moins bien que celui de la série harmonique qui diverge.

Divergence en module si $\beta < -1$: 2 pts dont 1 pt pour la justification.

iii. Dans le cas où $-1 \leq \beta \leq 0$, la série ne converge pas absolument et il convient de déterminer si elle est semi-convergente. Le terme général de la série s'écrit

$$u_k = (-1)^k v_k \quad \text{avec} \quad v_k = \frac{k^{\beta}}{\ln k} > 0$$

Semi-convergence si $\beta \in [-1,0]$: 2 pts dont 1 pt pour la démonstration de la décroissance monotone.

de sorte que la série est alternée. Elle est dès lors semi-convergente si v_k tend monotonement vers zéro.
Le terme général tend effectivement vers zéro puisque

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{-\beta}\ln k} = 0$$

La décroissance est monotone puisque

$$v_k = \frac{1}{k^{-\beta}\ln k} \qquad (-\beta \geq 0)$$

où $k^{-\beta}$ et $\ln k$ augmentent monotonement.
Dès lors, la série est semi-convergente pour $-1 \leq \beta \leq 0$.

Tableau récapitulatif des résultats : 1 pt, accordé si cohérence avec les résultats obtenus même si ceux-ci sont faux.

En conclusion, la série est

- absolument convergente si $\beta < -1$;
- semi-convergente si $\beta \in [-1,0]$;
- divergente si $\beta > 0$.

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. Afin de relier la fonction $\arcsin x$ à une fonction dont le développement en série de puissances est connu, on remarque que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Puisque $\arcsin 0 = 0$, la fonction $\arcsin x$ est donc la primitive de la fonction $1/\sqrt{1-x^2}$ qui s'annule en $x=0$, soit

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Expression de l'arcsinus comme la primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$ qui s'annule en $x = 0$: 3 pts, dont 1 pt pour l'annulation en zéro.

Le développement en série de puissances de la fonction $(1-t^2)^{-1/2}$ est celui de la série binomiale

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[k-1])}{k!}\, x^k \quad \text{sur} \quad]-1,1[$$

où $\alpha = -1/2$ et $x = -t^2$.

Appel à la série binomiale : 3 pts dont 1 pt pour la valeur de α et 1 pt pour le changement de variable.

On a donc, pour $-t^2 \in]-1,1[$, c'est-à-dire pour $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-[k-1])}{k!}\,(-1)^k t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+[k-1])}{k!}\, t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\, k!}\, t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2\cdots[2k-2]2k)\,2^k k!}\, t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)\,2^k k!}\, t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\, 2^{2k}}\, t^{2k}
\end{aligned}$$

Développement de $1/\sqrt{1-t^2}$ en série de puissances : 2 pts

À ce stade, il n'est pas nécessaire que les coefficients de la série binomiale soient transformés en factorielles et exponentielles. Ceci sera valorisé au point ii.

La série de puissances peut être intégrée terme à terme sur tout intervalle $[0,x]$ (ou $[x,0]$) inclus dans son intervalle de convergence $]-1,1[$. On a alors

Justification de l'intégration terme à terme : 3 pts (dont 1 pt pour l'identification de l'intervalle de convergence).

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}}\,t^{2k}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}} \int_0^x t^{2k}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}\,(2k+1)}\,x^{2k+1}\end{aligned}$$

Intégration terme à terme : 3 pts

Par construction, l'intervalle de convergence de cette série est $]-1,1[$.

Intervalle de convergence de la série : 1 pt
Total i. : 15 pts

ii. La série obtenue a bien la forme attendue en donnant aux constantes les valeurs $\gamma = 2$ et $\delta = 1$.

Transformation des coefficients de la série binomiale en factorielles et exponentielles : 3 pts
Valeurs exactes de γ et δ : 1 pt
Total ii. : 4 pts

iii. En $x = \pm 1$, la série ci-dessus prend la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}\,(2k+1)}\,(\pm 1)^{2k+1}$$

En module, son terme général est tel que

$$\begin{aligned}\frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}\,(2k+1)} &\sim \frac{\sqrt{4\pi k}\,(2k)^{2k}\,\mathrm{e}^{-2k}}{(\sqrt{2\pi k}\,k^k\,\mathrm{e}^{-k})^2 2^{2k}(2k+1)}, \qquad (k\to\infty) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}\,(2k+1)}, \qquad (k\to\infty) \\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right), \qquad (k\to\infty)\end{aligned}$$

Utilisation correcte de la formule de Stirling : 1 pt

On en déduit que la série converge absolument en $x = \pm 1$.

Convergence absolue en ± 1 : 2 pts, dont 1 pt pour la justification. Le caractère absolu n'est pas indispensable.

Toute série de puissances restant continue aux extrémités de son intervalle de convergence où elle converge et la fonction arcsin étant continue en $x = \pm 1$, il vient, par continuité,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2\,2^{2k}\,(2k+1)}\,x^{2k+1} = \arcsin x \qquad \forall x \in \mathtt{E} = [-1,1]$$

Détermination de $\mathtt{E}$: 2 pts dont 1 pt pour la justification par la continuité.

Total iii. : 5 pts
TOTAL QII : 24 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

Quand un énoncé comprend un paramètre, le choix des valeurs pivots de celui-ci utilisées pour mener la discussion ne doit pas être arbitraire mais est dicté par les résulats obtenus. Par exemple, ici, la vérification de la condition nécessaire de convergence nous apprend que la série change de comportement en $\beta = 0$. De même, le critère de convergence induit une nouvelle valeur pivot en $\beta = -1$. Lorsqu'une discussion est menée en fonction d'un paramètre, il est aussi indispensable de donner le récapitulatif des résultats en guise de conclusion de l'exercice.

- La vérification de la condition nécessaire de convergence dans les exercices avec paramètre permet de traiter facilement une grande partie du domaine de variation du paramètre, celle pour laquelle le terme général de la série ne tend pas vers zéro. C'est assurément ainsi qu'il faut démarrer ce genre d'exercice.
- La série étudiée est une série alternée. Il convient toujours d'envisager la possibilité de **convergence absolue** d'une telle série avant celle de sa **semi-convergence**. La convergence absolue est en effet une propriété plus forte que la semi-convergence. Elle se traduit, par exemple, par la décroissance plus rapide de l'erreur associée aux sommes partielles et par l'indépendance de la convergence par rapport à d'éventuels réarrangements des termes de la série.
- Le critère de convergence utilisé pour prouver la convergence absolue de la série n'est qu'une condition suffisante de convergence, pas une condition nécessaire. Si la condition est vérifiée pour $\beta < -1$, on ne peut pas en conclure que la série diverge en module pour $\beta \geq -1$. Il faut utiliser pour ce faire des critères spécifiques de divergence des séries numériques.
- Pour prouver qu'une série alternée est semi-convergente, il faut vérifier que le module du terme général de la série **tend monotonément** vers zéro. Il ne suffit pas de montrer que sa limite vaut zéro.

Question I

i.
- Il est indispensable de préciser quelle primitive de $1/\sqrt{1-x^2}$ représente la fonction $\arcsin x$. Ceci demande de choisir la primitive qui s'annule en $x = 0$, ce qui s'exprime mathématiquement par
$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$
- Afin d'obtenir l'expression en série de puissances de la fonction $\arcsin x$, il convient de justifier la possibilité d'intégrer terme à terme la série de puissances représentant $1/\sqrt{1-x^2}$ sur tout intervalle fermé inclus dans son intervalle de convergence. Cet intervalle doit bien sûr lui-aussi être précisé.

ii. Il semble utile pour de nombreux étudiants de s'exercer encore à la manipulation des coefficients faisant intervenir exponentielles et factorielles, comme lors de la simplification des coefficients binomiaux de la série représentant $1/\sqrt{1-x^2}$. Il s'agit d'une compétence de "calcul" qui doit être acquise.

iii.
- La formule de Stirling décrit le comportement asymptotique de la factorielle pour $k \to \infty$. Il est donc tout à fait incorrect de remplacer la factorielle par cette approximation dans la $\sum_{k=0}^{\infty}$. L'approximation ne peut être utilisée que dans le cadre de l'étude du comportement asymptotique ou du calcul d'une limite pour $k \to \infty$.

- L'ensemble E recherché ne peut comprendre, en plus de l'intervalle de convergence de la série, que les extrémités de celui-ci où la série converge. La convergence de la série en ces points doit être vérifiée mais elle ne suffit cependant pas à y garantir la représentation de l'arcsinus. Cette représentation est par contre garantie par la continuité de la série de puissances et de la fonction arcsinus aux extrémités de l'intervalle ouvert sur lequel l'égalité de ces deux fonctions est avérée.