Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2017

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Durée de l'épreuve : 2 heures et demie. Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées. Indiquez votre nom en MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille. Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
Consultez les conseils pour une bonne présentation des copies disponibles sur www.mmm.ulg.ac.be. Les copies seront reprises lors du cours du **21 mars**.

Question I

On considère la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(5-2x)^k}{k}$.

i. Déterminez le plus grand ensemble $\mathtt{E}$ sur lequel la série définit une fonction f.

ii. Étudiez la convergence uniforme de la série.

iii. En utilisant le résultat

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{pour} \quad t \in]-1,1]$$

déterminez une expression analytique de f. Sur quel ensemble cette expression analytique représente-t-elle la série ?

iv. Déterminez une expression de f' en série de puissances de $(5-2x)$. Quel est le plus grand ensemble $\mathtt{E}'$ sur lequel cette expression est valable ? Justifiez.

Question II

i. La convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ entraîne-t-elle la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$? Justifiez.

ii. La convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ entraîne-t-elle la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$? Justifiez.

Question III

On considère la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4}$$

i. Déterminez l'ensemble $\mathtt{E}$ sur lequel cette série converge et précisez le type de convergence.

ii. Cette série est-elle intégrable terme à terme sur un intervalle $[a,b] \subset \mathtt{E}$? Justifiez.

iii. Jusqu'à quel ordre peut-on justifier la dérivabilité terme à terme de cette série sur $\mathtt{E}$ en utilisant le théorème de dérivation des séries de fonctions ? Justifiez en détails en vérifiant chaque fois les hypothèses du théorème.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La série définit une fonction f en chacun des points où elle converge.
L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à considérer

Application correcte d'un critère à la série des modules : 2 pts

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} &= \lim_{k\to\infty}\frac{|5-2x|^{k+1}}{|5-2x|^k}\,\frac{k}{k+1}\\ &= |5-2x|\,\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1} = |5-2x|\end{aligned}$$

- La série converge absolument si $|5-2x| < 1$, c'est-à-dire si $x \in]2,3[$. L'ouvert $\mathtt{I} =]2,3[$ constitue l'intervalle de convergence de la série.
- La série diverge si $|5-2x| > 1$ c'est-à-dire si $x \in]-\infty,2[\cup]3,+\infty[$.
- Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|5-2x| = 1$.

Conclusions sur la convergence (absolue ou non) et la divergence issues du critère : 2 pts

Nous devons donc étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à $x = 2$ et $x = 3$.

◇ Si $x = 2$, la série devient

Divergence en $x = 2$: 2 pts.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5-2\cdot 2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

et s'identifie à la série harmonique. Elle est donc divergente.

◇ Si $x = 3$, la série devient

Semi-convergence en $x = 3$: 2 pts dont 1 pt pour la méthode.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5-2\cdot 3)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

Il s'agit d'une série alternée qui ne converge pas absolument mais dont la semi-convergence est assurée puisque $1/k$ décroit monotonément vers 0.

Conclusions sur $\mathtt{E}$: 1 pt

En conclusion, la série converge sur $\mathtt{E} =]2,3]$ et définit une fonction sur cet intervalle.

Total i. : 9 pts

ii. En tant que série de puissances, la série converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence $]2,3[$.
Toute série de puissances convergeant en une extrémité $\tilde{x}$ de son intervalle de convergence $\mathtt{I}$ converge également uniformément sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta] \subset \mathtt{I} \cup \{\tilde{x}\}$. Dès lors, la convergence est également uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]2,3]$.

Convergence uniforme $\forall[\alpha,\beta] \in]2,3[$: 2 pts

Extension (avec justification spécifique) à $]2,3]$: 1 pt

Total ii. : 3 pts

iii. Repartant de la série donnée, nous écrivons successivement

Manipulations correctes conduisant à l'expression analytique : 3 pts

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(5-2x)^k}{k} &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x-5)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2x-5)^{k+1}}{k+1}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x-5)^{k+1}}{k+1}\\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{k+1}}{k+1} = -\ln(1+y) \qquad \text{où} \qquad y = 2x-5\\ &= -\ln(2x-4)\end{aligned}$$

Domaine où l'égalité est valable : 1 pt

où l'égalité en y est valable si $y = 2x-5 \in]-1,1]$, c'est-à-dire si $x \in]2,3]$.

Total iii. : 4 pts

iv. Puisque la fonction f est définie par une série de puissances, sa dérivée peut être calculée terme à terme sur $\mathtt{I}$ de sorte que

Justification de la dérivabilité terme à terme de f : 1 pt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[\frac{(5-2x)^k}{k}\right] \\ &= -2\sum_{k=1}^{\infty}(5-2x)^{k-1} = -2\sum_{k=0}^{\infty}(5-2x)^k \qquad (\diamondsuit) \end{aligned}$$

Expression de la dérivée en série de puissances : 1 pt

dont l'intervalle de convergence est encore $\mathtt{I}$.

En l'extrémité de l'intervalle $\mathtt{I}$ où la série converge, on a

Divergence de la série des dérivées en $x = 3$: 1 pt

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}(5-2x)^k\Bigg|_{x=3} = -2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

qui diverge puisque son terme général ne tend pas vers zéro. On en déduit que la série $(\diamondsuit)$ représente f' uniquement sur $\mathtt{E}' = \mathtt{I} =]2,3[$.

Intervalle $\mathtt{E}'$: 1 pt

Total iv. : 4 pts

De façon alternative, on peut répondre à la question posée en repartant de l'expression analytique de f. On a

Calcul de f' : 1 pt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[-\ln(2x-4)] = \frac{-2}{2x-4}$$

Expression de f' en série de puissances de $(5-2x)$ sur $\mathtt{I}$: 2 pts

Une première façon de transformer f' en une série de puissances est d'écrire ensuite, en utilisant la série géométrique,

$$f'(x) = \frac{-2}{2x-4} = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-(x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(x-1)^k \quad \text{pour} \quad x \in]0,2[$$

Cette expression ne constitue pas une série de puissances de $(5-2x)$ et ne peut représenter f' sur $\mathtt{I} =]2,3[$ puisqu'elle n'y converge pas.

Intervalle $\mathtt{E}'$: 1 pt

On peut par contre obtenir une série de puissances de la forme souhaitée en écrivant successivement

Total iv. (méthode alternative) : 4 pts

$$f'(x) = \frac{-2}{2x-4} = \frac{-2}{1-(5-2x)} = -2\sum_{k=0}^{\infty}(5-2x)^k \quad \text{pour} \quad x \in]2,3[$$

TOTAL QI *: 20 pts*

Question II

i. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, alors son terme général tend vers zéro. Dès lors, il existe un entier N tel que $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq N$. Pour de telles valeurs de $k \geq N$, on a

Démonstration : 2 pts

$$a_k^2 \leq |a_k|$$

Le terme général de la série des a_k^2 est donc majoré par le terme général d'une série numérique convergente puisque la série des a_k est absolument convergente.

Conclusion correcte : 1 pt

Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence de la série à termes positifs

Total i. : 3 pts

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

ii. La série numérique de terme général

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

est convergente en tant que série alternée dont le module du terme général décroît monotonément vers zéro. Par contre, la série harmonique

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

est divergente.

Dès lors, la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ n'entraîne pas la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

Contre-exemple correct : 1 pt
Vérification de l'hypothèse : 1 pt
Négation de la thèse : 1 pt
Total ii. : 3 pts
TOTAL QII *: 6 pts*

Question III

i. Le module du terme général de cette série est majoré sur $\mathbb{R}$ par le terme général d'une série numérique convergente puisque

$$\left|\frac{\cos kx}{k^4}\right| \leq \frac{1}{k^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $1/k^4$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

En conséquence du critère de Weierstrass, la série de fonctions donnée converge donc absolument et uniformément sur $\mathtt{E} = \mathbb{R}$.

Appel au critère de Weierstrass : 1 pt
Conclusions sur le type de convergence : 2 pts
Intervalle $\mathtt{E}$ *: 1 pt*
Total i. : 4 pts

ii. Pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\cos kx}{k^4} \in C_0([a,b]) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} \overset{[a,b]}{\Longrightarrow} f(x) \end{cases}$$

Dès lors, la série est intégrable terme à terme sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Continuité des f_k : 1 pt
Convergence uniforme de la série des f_k : 1 pt
Conclusion correcte : 1 pt
Total ii. : 3 pts

iii. Les conditions suffisantes du théorème de dérivation des séries de fonctions sont vérifiées sur $\mathbb{R}$ puisque

- $\dfrac{\cos kx}{k^4} \in C_1(\mathbb{R})$
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ en lequel la série converge (selon i., la série converge sur $\mathbb{R}$)
- La série des dérivées, à savoir

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} \tag{♠}$$

  converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\left|-\frac{\sin kx}{k^3}\right| \leq \frac{1}{k^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  où $1/k^3$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Connaissance et vérification des 3 hypothèses : 3 pts

Ceci justifie la dérivation terme à terme à l'ordre 1. L'intervalle de convergence de la série des dérivées est identique à l'intervalle de convergence de la série initiale, soit $\mathbb{R}$.

La série (♠) vérifie encore des conditions suffisantes pour être dérivée terme à terme puisque

- $-\dfrac{\sin kx}{k^3} \in C_1(\mathbb{R})$
- $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ en lequel la série converge (la série converge sur $\mathbb{R}$)
- La série des dérivées, à savoir

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \qquad (♣)$$

  converge uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\left|-\frac{\cos kx}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  où $1/k^2$ est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Ceci justifie la dérivation terme à terme à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.

Justification de la dérivabilité terme à terme à l'ordre 2 : 3 pts

On ne peut tenir un raisonnement analogue pour justifier la dérivabilité terme à terme de (♣) puisque la série de ses dérivées s'écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

et que la majoration naturelle du module de son terme général est $1/k$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente. Ceci n'exclut pas que la série (♣) soit éventuellement dérivable terme à terme, mais on ne peut conclure en la possibilité de dériver terme à terme à l'ordre trois par application du théorème de dérivation des séries de fonctions.

Identification du problème pour la dérivation d'ordre 3 : 1 pt

En conclusion, on peut justifier la dérivabilité terme à terme jusqu'à l'ordre 2 en utilisant le théorème de dérivation des séries de fonctions.

Total iii. : 7 pts

TOTAL QIII *: 14 pts*

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i.
- Une série de fonctions définit une fonction en tout point où elle converge. Le domaine de définition est donc formé de l'ensemble des points où la série converge.
- Les critères (racine, quotient, comparaison et k^{α}) ne peuvent être appliqués qu'à des séries à termes positifs. Pour étudier la convergence d'une série dont le signe n'est pas constant, comme la série proposée, les critères doivent être appliqués à la série des modules. Le cas échéant, ceci permet d'établir la convergence absolue de la série.

  Lorsque les critères de la racine et du quotient permettent de conclure à la divergence de la série des modules, la série initiale — sans les modules — est également divergente car son terme général ne tend pas vers zéro.

  Dans le cas d'une série de puissances, les critères appliqués à la série des modules permettent dès lors d'identifier l'intervalle (ouvert) de convergence de la série. La convergence en les extrémités de cet intervalle de convergence doit généralement être étudiée par des approches spécifiques.
- La série numérique obtenue pour $x = 3$ est une série alternée dont on peut montrer qu'elle est semi-convergente. Ce résultat doit être démontré en faisant appel au théorème relatif à la convergence des séries alternées qui demande de vérifier que le module du terme général de la série tend monotonément vers zéro.

ii. L'étude de la convergence uniforme repose sur le résultat théorique affirmant que tout série de puissances converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence.

Rappelons que l'intervalle de convergence d'une série de puissances est par définition le plus grand ouvert $\mathtt{I}$ sur lequel la série converge. Même si la série converge en une extrémité de $\mathtt{I}$, ce point n'appartient pas à l'intervalle de convergence. Il ne faut donc pas confondre l'intervalle de convergence ($\mathtt{I} =]2,3[$ dans cet exercice) et le domaine sur lequel la série converge ($]2,3]$ dans cet exercice).

On notera cependant que toute série de puissances convergeant en une extrémité $\tilde{x}$ de son intervalle de convergence $\mathtt{I}$ converge également uniformément sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta] \subset \mathtt{I} \cup \{\tilde{x}\}$. Dès lors, la convergence est également uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]2,3]$.

iii. Si on pose $t = 5 - 2x$ dans l'expression

$$\ln(1+t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{pour} \quad t \in]-1,1]$$

on obtient

$$\ln(6-2x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(5-2x)^{k+1}}{k+1} \quad \text{pour} \quad x \in [2,3[$$

Cette expression se rapproche de celle qui est donnée à étudier. Contrairement à ce qu'on peut lire sur un nombre important de copies, on ne peut alors écrire

$$|\ln(6-2x)| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{(5-2x)^{k+1}}{k+1} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|5-2x|^{k+1}}{k+1} \quad \text{pour} \quad x \in [2,3[$$

Le module d'une somme, et encore moins celui d'une série, n'est pas égal à la somme ou à la série des modules.

iv. Une série de puissances peut être dérivée terme à terme sur son intervalle de convergence. Ce résultat permet ici de déterminer l'expression en série de puissances de f'.

Afin de déterminer le plus grand ensemble sur lequel l'expression obtenue était valable, il convenait de s'interroger sur la possibilité d'aussi dériver terme à terme en $x = 3$, extrémité de $\mathtt{I}$ où la série converge mais qui n'appartient pas à l'intervalle de convergence. Cette possibilité n'est pas automatique, elle demande de vérifier que la série des dérivées converge aussi en ce point, ce qui n'était pas la cas ici.

Question II

i.
- Les critères de convergence des séries à termes positifs ne sont que des conditions suffisantes de convergence, pas des conditions nécessaires. On ne peut donc pas, par exemple, déduire que si une série converge le critère du quotient est automatiquement vérifié et utiliser ce résultat pour mener à bien la démonstration.
- Il fallait justifier que $a_k^2 \leq |a_k|$ pour $k \geq N$, par exemple, comme dans la solution type, en se basant sur le fait que le terme général d'une série numérique convergente tend vers zéro.

ii. Pour démontrer qu'un énoncé est faux, la façon la plus efficace est de donner un contre-exemple. Dans ce cas, il faut montrer que cet exemple vérifie les hypothèses de l'énoncé mais n'en vérifie pas la thèse.

Question III

La série donnée n'est pas une série de puissances. Il faut donc lui appliquer les résultats généraux relatifs aux séries de fonctions.

i. L'application du critère de Weierstrass à la série des modules était indispensable et permettait de conclure à la convergence absolue de la série sur $\mathbb{R}$ mais aussi à sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, élément indispensable pour le point suivant.

ii. Le théorème relatif à l'intégration terme à terme des séries de fonctions demande la vérification de deux hypothèses, la continuité des fonctions et la convergence uniforme de la série sur l'intervalle fermé borné sur lequel l'intégrale est calculée. Ces deux hypothèses devaient donc être vérifiées pour pouvoir appliquer le théorème à la série donnée.

iii. L'application du théorème relatif à la dérivation terme à terme des séries de fonctions demandait d'en lister les trois hypothèses et de les vérifier dans le cadre de la série de fonctions donnée.
- La première hypothèse est la continue dérivabilité des fonctions.
- La deuxième hypothèse est la convergence de la série en un point de l'intervalle sur lequel la démonstration est réalisée, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ dans ce problème. Montrer que la limite pour $k \to \infty$ des fonctions est nulle en un certain x_0 ne permet pas de vérifier l'hypothèse puisqu'il ne s'agit que d'une condition nécessaire de convergence en ce point.
- La troisième hypothèse porte sur la convergence uniforme de la série des dérivées (sur le domaine de dérivation ou sur tout intervalle fermé borné de celui-ci). Le critère de Weiertrass constitue l'outil pratique principal qui permet de démontrer la convergence uniforme d'une série de fonctions.

Ce raisonnement pouvait être répété une seconde fois pour justifier la dérivabilité terme à terme à l'ordre 2. Il n'était par contre pas possible de le répéter une troisième fois. Cependant, le théorème utilisé n'apportant que des conditions suffisantes permettant la dérivation terme à terme, on ne peut exclure que la dérivation terme à terme à l'ordre trois reste licite.