Prof. Éric J.M.DELHEZ

ANALYSE MATHÉMATIQUE 2

ÉVALUATION FORMATIVE

30 Mars 2021

Question I

Soit
$$\int_0^a dx \int_0^{b\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}} f(x,y)dy$$
où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

Changez l'ordre d'intégration. Précisez des conditions suffisantes sur f pour que cette opération ne modifie pas la valeur de l'intégrale.

Question II

i. Représentez la surface d'équation
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
où a, b et c sont des constantes réelles strictement positives.

ii. Évaluez le volume intérieur à cette surface en utilisant le calcul intégral.
On pourra utiliser utilement le fait que l'aire intérieure d'une ellipse de demi-axes a et b vaut πab.

Question I

L'expression

$$\int_0^a dx \int_0^{b\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}} f(x,y)dy$$

est une réduction de l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathtt{E}} f(x,y)\; dxdy$$

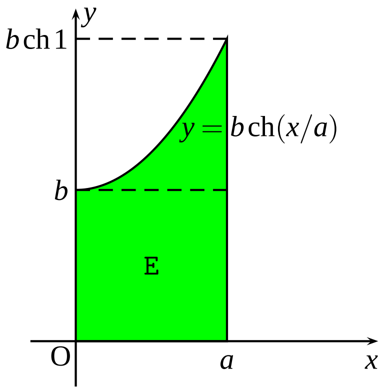
où (voir figure)

$$\mathtt{E} = \{(x,y) : 0 < x < a,\; 0 < y < b\,\mathrm{ch}(x/a)\}$$

si cette intégrale double existe, par exemple si la fonction f est continue sur le compact $\overline{\mathtt{E}}$.

Condition suffisante pour pouvoir changer l'ordre : existence de l'intégrale double ou fonction continue sur le compact $\overline{\mathtt{E}}$: 2 pts

Représentation du domaine : 2 pts, dont 1 pt pour les abscisses/ordonnées significatives



Dans ce cas, le théorème de Fubini nous permet de changer l'ordre d'intégration pour calculer l'intégrale. Le domaine est alors décrit en faisant varier

- y de 0 à b, et, pour y fixé, x de 0 à a ;
- puis, y de b à $b\,\mathrm{ch}\,1$, et, pour y fixé, x de la courbe $y = b\,\mathrm{ch}(x/a)$, c'est-à-dire $x = a\,\mathrm{arch}(y/b)$ à a.

On est alors conduit à évaluer

$$\int_0^b dy \int_0^a f(x,y)dx + \int_b^{b\,\mathrm{ch}\,1} dy \int_{a\,\mathrm{arch}(y/b)}^a f(x,y)dx$$

Intégrale avec ordre inversé : 2 pts

TOTAL QI : 6 PTS

Question II

i. La surface

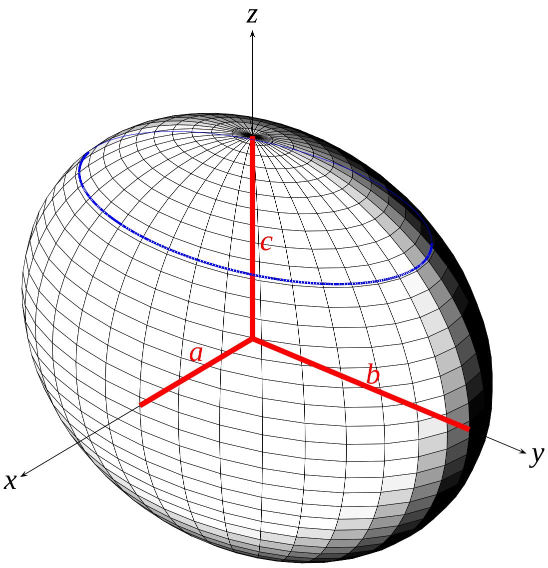
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est un ellipsoïde de demi-axes a, b et c. On peut s'en convaincre en constatant que la section de cette surface par un plan $z = z_* =$ constante est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z_*^2}{c^2}$$

qui dégénère en un point pour $z_* = \pm c$.

Total i. : 2 pts dont 1 pt pour avoir positionné a, b et c sur les axes. Justification pas nécessaire



ii. Le volume de l'ellipsoïde se calcule suivant

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dx\,dy\,dz$$

où

$$\mathtt{E} = \{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

L'intégrale existe puisque l'intégrande est continu sur le compact $\mathtt{E}$. Elle peut donc être calculée dans n'importe quel ordre d'intégration partielle, en vertu du théorème de Fubini.

Expression intégrale du volume : 1 pt
Description mathématique du domaine : 1 pt
Existence de l'intégrale : 1 pt, aussi accordé si justification basée sur le fait que le volume représenté est bien fini

Pour décrire $\mathtt{E}$, la coordonnée verticale z varie de $-c$ à c et, pour z fixé, les variables x et y décrivent la surface $\Sigma(z)$ dont le pourtour est l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1$$

On a donc

$$V = \int_{-c}^{c} dz \iint_{\Sigma(z)} dxdy$$

Réduction de l'intégrale : 3 pts

Puisque l'intégrale de la fonction 1 sur $\Sigma(z)$ représente l'aire intérieure de l'ellipse, il vient

Calcul : 3 pts

$$\begin{aligned} V &= \int_{-c}^{c} \pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\, b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,dz \\ &= \pi ab \int_{-c}^{c} \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_{-c}^{c} \\ &= 2\pi ab\left(c - \frac{c}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi abc \end{aligned}$$

Volume exact : 1 pt
Total ii. : 10 pts

qui a bien les dimensions d'un volume si a, b et c sont des longueurs et qui donne bien le volume connu de la sphère si $a = b = c$.

Remarquons qu'il est aussi possible, mais beaucoup plus long, de réduire complètement l'intégrale. Dans ce cas, il est plus simple de considérer que le volume de l'ellipsoïde est égal à 8 fois le volume de la partie de l'ellipsoïde contenue dans le premier octant et pouvant être décrite

- en faisant varier x de 0 à a,
- puis, pour x fixé, y de 0 à $b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$
- et enfin, pour x et y fixés, z de 0 à $c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$.

Même répartition des points que pour la première méthode

On a donc

$$\begin{aligned} V &= 8\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz \\ &= 8c\int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale par rapport à y, on pose

$$\frac{y}{b} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sin t$$

soit

$$dy = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\cos t\, dt$$

et les bornes d'intégration se transforment en $t = 0$ pour $y = 0$ et $t = \pi/2$ pour $y = b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} V &= 8bc\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\; dt = 8bc\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt \\ &= 4bc\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 2\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi\, abc \end{aligned}$$

TOTAL QII : 12 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Une condition suffisante pour pouvoir changer l'ordre de deux intégrales simples successives sans changer la valeur de l'expression est fournie par le théorème de Fubini : il suffit que l'intégrale double correspondante existe. Pour appliquer ce théorème, il convient donc de commencer par exprimer cette intégrale double, en identifiant correctement le domaine d'intégration E.

  En pratique, l'existence d'une intégrale multidimensionnelle peut être justifiée de deux façons différentes.

  – La situation la plus simple est celle où on intègre une fonction continue sur un compact, c'est-à-dire un ensemble fermé et borné. Ceci assure en effet l'intégrabilité.
    Puisque $\mathtt{E}$ est ici borné, on peut dès lors justifier l'existence de l'intégrale double, et donc la permutation de l'ordre des intégrales partielles, en introduisant l'hypothèse de continuité de f sur $\overline{\mathtt{E}}$ où $\overline{\mathtt{E}}$ désigne l'adhérence de $\mathtt{E}$, *i.e.* le compact formé de l'union de $\mathtt{E}$ et de sa frontière. Si le domaine d'intégration $\mathtt{E}$ est décrit initialement comme un compact, alors $\overline{\mathtt{E}} = \mathtt{E}$ et il suffit de supposer $f \in C_0(\mathtt{E})$.
  – L'autre approche pour justifier l'existence d'une intégrale double repose sur le critère de Tonelli. L'intégrale double existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui existe. Cette approche générale est la seule applicable si $\mathtt{E}$ n'est pas borné ou si f n'est pas continue sur $\overline{\mathtt{E}}$.

- La représentation graphique du domaine est indispensable, non seulement pour voir s'il est borné mais aussi pour pouvoir réduire correctement l'intégrale double dans un autre ordre d'intégration que celui proposé. Pour organiser efficacement son raisonnement et les développements mathématiques, il convient d'identifier la frontière du domaine et de noter sur les axes les abscisses et ordonnées correspondant aux limites des différentes courbes constituant cette frontière.

- Une fois le domaine représenté, il faut décrire correctement celui-ci afin de pouvoir réduire l'intégrale. L'expression intégrale proposée était idéale pour ce domaine puisqu'elle permettait de décrire celui-ci en une seule fois. Ce n'est plus le cas avec l'ordre alternatif puisque la frontière du gauche du domaine est constituée de deux courbes différentes. L'intégrale double doit donc être exprimée comme une somme de deux successions d'intégrales simples.

Question II

i. Pour un dessin précis, il était nécessaire de noter sur les axes cartésiens les valeurs a, b et c, correspondant aux limites de l'ellipsoïde.

ii. • La première chose à faire dans ce genre de problème est de donner l'expression intégrale correspondant à la grandeur à évaluer, en définissant mathématiquement le domaine d'intégration $\mathtt{E}$.

  • Il est ensuite bon de s'intéresser à l'existence de l'intégrale à calculer. Celle-ci peut être justifiée par la continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration si celui-ci a été défini comme un ensemble fermé et borné (avec $\leq$) ou sur l'adhérence de celui-ci, s'il a été défini comme un ensemble borné mais ouvert (avec une inégalité stricte).
  Notons que, dans le cas présent, le bon sens physique permet aussi de justifier simplement l'existence de l'intégrale puisque le volume représenté est manifestement fini.

  • Tenant compte de la suggestion, la description du domaine était facilement menée en considérant un empilement d'ellipses dont les dimensions dépendent de la variable z.

  • Les réponses soumises font apparaître des expressions

$$\iiint_{\mathtt{E}} dxdydz = \int_{-c}^{c} dz \iint_{\Sigma} dxdy = \int_{-c}^{c} \pi ab\, dz$$

  et

$$\iiint_{\mathtt{E}} dxdydz = \int_{-c}^{c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz \iint_{0}^{\pi ab} dxdy$$

qui ne sont pas correctes.
La première exprime le volume d'un cylindre elliptique dont la section par un plan horizontal présente une aire constante πab.
La seconde ne constitue pas une expression mathématique correcte.

- Différents changements de variables pouvaient être introduits pour décrire le domaine d'intégration. Cette approche est parfaitement licite mais était ici plus longue.
  Précisons que les propriétés des changements de variables classiques (*e.g.* coordonnées cylindriques) sont bien connues et que ceux-ci peuvent être utilisés dans les applications sans reproduire les résultats théoriques correspondants. Par contre, la régularité des changements de variables non classiques doit être systématiquement établie avant leur application.