Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mars 2021

Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Question I

Si f est une fonction mesurable telle que $f \sim g$, $(x \to +\infty)$ et si g est intégrable au sens de Lebesgue au voisinage de $+\infty$, démontrez que f est intégrable au sens de Lebesgue au voisinage de $+\infty$.

Question II

i. Étudiez l'existence de

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\, dx$$

ii. Étudiez l'existence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\, dx$$

iii. Étudiez l'existence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^3 \ln^2 x}\, dx$$

iv. Étudiez en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}\, dx$$

Question I

Si $f \sim g$, $(x \to +\infty)$, alors $f = O(g)$, $(x \to +\infty)$ de sorte que

$$(\exists C > 0 \text{ et } V(+\infty))(\forall x \in V(+\infty)) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Traduction du comportement asymptotique au moyen d'une majoration (avec une constante) : 2 pts, dont 1 pt pour la justification correcte

Puisque g est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que $|g|$ l'est aussi puisque l'intégrale de Lebesgue est absolument convergente, ainsi que $C|g|$.

Dès lors, on a

$$|f| \leq C|g| \in \mathbb{L}_1(V(+\infty))$$

Intégrabilité de $C|g|$: 1 pt

Toute fonction mesurable majorée par une fonction intégrable étant intégrable (critère de Lebesgue), on en déduit que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Appel au critère de Lebesgue : 2 pts

TOTAL QI : 5 PTS

Question II

i. Soit

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que

  $$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} \in C_0(]1,2])$$

  Continuité sur $]1,2]$: 1 pt

  Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]1,2]$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de 1.

- La formule de Taylor permet d'écrire

  $$\ln x \sim x - 1, \quad (x \to 1^+)$$

  de sorte que

  $$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} \sim \frac{(x-1)^{3/2}}{(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad (x \to 1^+)$$

  Comportement asymptotique de l'intégrande au voisinage de 1 : 2 pts dont 1 pt pour la justification

  Ceci assure l'intégrabilité au voisinage de 1 puisque l'intégrande s'y comporte comme une fonction intégrable.

  Intégrabilité au $V(1)$: 1 pt

En conclusion, l'intégrale existe.

Conclusion correcte : 1 pt

Total i. : 5 pts

ii. Soit

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} \in C_0([2,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $[2,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de $+\infty$.

Pas de point pour la continuité car pas utile pour prouver la non-intégrabilité sauf 1 pt si seul point obtenu

- On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} = +\infty$$

L'intégrande ne tend pas vers 0 quand x tend vers l'infini et ne peut donc être intégrable dans ce voisinage.

Non-intégrabilité au voisinage de l'infini : 2 pts

En conclusion, l'intégrale n'existe pas.

Justification par le calcul de la limite ou un critère de non-intégrabilité adéquat : 2 pts
Total ii. : 4 pts

iii. Soit

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^3 \ln^2 x}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^3\ln^2 x} \in C_0([2,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $[2,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de $+\infty$.

Continuité sur $[2,+\infty[$: 1 pt

- On a

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^3\ln^2 x} \sim \frac{1}{x^{3/2}\ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (x\to+\infty)$$

ce qui assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ puisque, dans ce cas, l'intégrande se comporte mieux qu'une fonction intégrable.

Comportement asymptotique au voisinage de l'infini : 2 pts
Intégrabilité au voisinage de l'infini : 1 pt

En conclusion, l'intégrale existe.

Conclusion correcte : 1 pt
Total iii. : 5 pts

iv. Soit

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que, quel que soit $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta\ln^2 x} \in C_0(]1,+\infty[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]1,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement aux voisinages de 1 et de $+\infty$.

Continuité sur $]1,+\infty[$: 1 pt

- Au voisinage de $x = 1$, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\ln x \sim x - 1, \quad (x \to 1^+)$$

de sorte que

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x} \sim \frac{(x-1)^{3/2}}{(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad (x \to 1)$$

L'intégrabilité est donc assurée au voisinage de 1 quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Comportement asymptotique au voisinage de 1 : 2 pts dont 1 pt pour la justification

Intégrabilité au $V(1)$: 1 pt

- ◇ Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x} \sim \frac{1}{x^{\beta-\frac{3}{2}} \ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x^{\beta-\frac{3}{2}}}\right), \quad (x \to +\infty)$$

ce qui assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ pour $\beta > 5/2$ puisque, dans ce cas, l'intégrande se comporte mieux qu'une fonction intégrable dans un tel voisinage.

Nous ne pouvons par contre en tirer aucune conclusion pour $\beta \leq 5/2$.

Comportement asymptotique au voisinage de l'infini : 2 pts

Intégrabilité au voisinage de l'infini pour $\beta > 5/2$: 2 pts

◇ On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\dfrac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/2-\beta}} = 0 \qquad \forall \beta < 5/2$$

de sorte que

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}\right), \quad (x \to +\infty) \qquad \forall \beta < 5/2$$

L'intégrale n'existe donc pas pour $\beta < 5/2$ puisque l'intégrande se comporte alors moins bien qu'une fonction non intégrable au voisinage de $+\infty$.

Non-intégrabilité pour $\beta < 5/2$: 1 pt

Justification par le critère de non-intégrabilité : 2 pts, dont 1 pt pour le calcul de la limite

◇ Si $\beta = 5/2$, les critères d'intégrabilité et de non-intégrabilité utilisés ci-dessus ne permettent pas de conclure. Dans ce cas,

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x} \sim \frac{1}{x \ln^2 x}, \quad (x \to +\infty)$$

Pas de conclusion avec les critères si $\beta = 5/2$: 1 pt, aussi attribué si l'étudiant n'inclut ce cas limite dans aucune de ses conclusions précédentes.

Nous examinons alors une primitive $F(x)$ de $1/(x \ln^2 x)$, soit

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x}$$

Appel à la primitive de $1/(x^2 \ln x)$: 1 pt

Cette primitive possède une limite finie en $+\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. De plus, la fonction $1/(x \ln^2 x)$ est réelle et de signe constant au voisinage de l'infini. Nous en déduisons que la fonction $1/(x \ln^2 x)$ est intégrable au voisinage de l'infini.

Intégrabilité de $1/(x^2 \ln x)$ correctement justifiée : 1 pt

Pas de pénalité si "réelle" est oublié

Le résultat démontré dans la question I permet alors de conclure à l'intégrabilité au voisinage de l'infini de la fonction

$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}$$

dans le cas où $\beta = 5/2$.

Utilisation du résultat de la QI et conclusion correcte : 1 pt

En conclusion,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x^\beta \ln^2 x}\,dx \quad \text{existe si et seulement si } \beta \geq 5/2$$

Conclusion : 1 pt

Total iv. : 16 pts
TOTAL QII *: 30 pts*

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Si une fonction g est intégrable au voisinage de l'infini, on ne peut en conclure qu'il existe $\alpha > 1$ tel que
$$g \sim \frac{1}{x^\alpha},\ (x \to +\infty) \text{ ou } g = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ (x \to +\infty) \text{ ni même } g = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ (x \to +\infty)$$
Les critères d'intégrabilité sont des conditions suffisantes, pas nécessaires, c'est-à-dire que si une fonction présente un de ces comportements au voisinage de l'infini, elle est intégrable mais que si elle est intégrable, elle ne se comporte pas forcément d'une de ces façons. On ne peut donc pas s'appuyer sur ces comportements pour mener un raisonnement général.
- Si $f \sim g,\ (x \to +\infty)$, on ne peut pas en conclure que $f \leq g$ ni que $|f| \leq |g|$ dans un voisinage de $+\infty$.
Considérons les fonction $f(x) = 1/x$ et $g(x) = 1/x - 1/x^2$. On a $f \sim g,\ (x \to +\infty)$ mais $f > g$ et $|f| > |g|$ pour tout $x > 0$.
- La façon simple et correcte de démontrer l'énoncé est de faire appel au critère de Lebesgue. Outre la caractère mesurable de la fonction f, l'hypothèse à vérifier pour appliquer ce critère est que $|f| \leq F$ où F est une fonction intégrable au voisinage considéré. L'hypothèse $f \sim g$ entrainant $f = O(g)$ et donc $|f| \leq C|g|$, il fallait encore justifier l'intégrabilité de $|g|$ ($g \in \mathbb{L}_1 \Leftrightarrow |g| \in \mathbb{L}_1$) et du produit $C|g|$ pour pouvoir mener à bien la démonstration.

Question II

i. Au voisinage de $x = 1$, le comportement asymptotique de la fonction logarithme correspond au terme dominant de son polynôme de Taylor. L'intégrande est donc asymptotique à $1/\sqrt{x-1}$, ce qui permet directement de conclure à l'intégrabilité au voisinage de $x = 1$ et à l'existence de l'intégrale.

ii.
- Pour qu'une fonction soit intégrable au voisinage de l'infini, il est indispensable qu'elle y tende vers 0. Ce n'est pas le cas ici, ce qui permet de conclure à la non-intégrabilité de l'intégrande au voisinage de l'infini et donc à la non-existence de l'intégrale.
- La justification de cette non-intégrabilité peut aussi être obtenue à partir d'un critère de non-intégrabilité, c'est-à-dire en montrant que $1/x$ est négligeable par rapport à l'intégrande au voisinage de l'infini.

- Il était par contre impossible de trouver un comportement asymptotique de l'intégrande au moyen d'une puissance de x car le logarithme n'est asymptotique à aucune puissance à l'infini.

- Montrer que
$$\frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x^{-3/2}}\right),\ (x \to \infty)$$
ne sert non plus à rien car cela indique simplement que l'intégrande se comporte mieux qu'une fonction qui n'est pas intégrable à l'infini, ce qui ne permet pas de conclure.

iii. Ici aussi, il est impossible de donner un comportement asymptotique de l'intégrande au voisinage de l'infini au moyen d'une puissance de x vu la présence du logarithme. Par contre, on peut facilement montrer que l'intégrande est négligeable par rapport à une fonction intégrable, ce qui permet de justifier l'intégrabilité au voisinage de l'infini et l'existence de l'intégrale.

iv.
- L'intégrabilité au voisinage de $x = 1$ a déjà été justifiée au point i. puisque le comportement asymptotique de l'intégrande au voisinage de $x = 1$ correspond à l'intégrande du point i. vu que $x^\beta \sim 1,\ (x \to 1)$.

- Quand il y a un paramètre dans un énoncé, une discussion n'est nécessaire que quand un résultat dépend de ce paramètre. Ici, l'intégrabilité au voisinage de l'infini ne peut être justifiée au moyen d'un critère d'intégrabilité que pour $\beta > 5/2$. Les cas correspondant à $\beta \leq 5/2$ doivent donc être traités différemment.

- Le critère de non-intégrabilité permet de conclure à la non-intégrabilité au voisinage de l'infini pour $\beta < 5/2$.

- Rappelons que les critères d'intégrabilité (non-intégrabilité) ne constituent que des conditions suffisantes. On ne peut donc rien conclure s'ils ne sont pas vérifiés. En particulier, dans cet exercice, les cas $\beta \leq 5/2$ ne peuvent pas être traités à partir du critère d'intégrabilité et les cas $\beta \geq 5/2$ ne peuvent pas être traités à partir du critère de non-intégrabilité.
On retiendra qu'on ne peut pas utiliser un critère d'intégrabilité pour prouver la non-intégrabilité ni un critère de non-intégrabilité pour prouver l'intégrabilité.

- Le cas $\beta = 5/2$ ne pouvant pas être traité par les critères pratiques d'intégrabilité et de non-intégrabilité, il convient de déterminer une primitive de l'intégrande afin de faire appel à un critère basé sur la primitive. Il n'est cependant pas possible dans cet exercice de trouver une primitive de l'intégrande. Par contre, on peut trouver une primitive du comportement asymptotique de l'intégrande et faire appel au résultat démontré dans la QI, à savoir que, si dans un voisinage donné $f \sim g$ où g est intégrable, alors f est aussi intégrable au même voisinage.

- La jusitification de l'intégrabilité (d'une fonction réelle) dans un voisinage donné basée sur la primitive demande de vérifier que la limite de la primitive y est finie et que l'intégrande y est de signe constant. C'est bien le cas ici.

- Rappelons que tout exercice présentant une discussion sur un paramètre doit se terminer par une conclusion reprenant les différents résultats obtenus en fonction du paramètre.