LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Avril 2019

ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

Les copies seront reprises lors du cours théorique du ***23 avril****.*

- ***Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

On considère une fusée propulsée dans l'espace depuis la surface de la Terre ($r = R > 0$) par l'allumage de moteurs fournissant une poussée par unité de masse $\alpha > 0$ constante. Par les lois de la mécanique, le temps nécessaire pour atteindre une hauteur $2R$ ($r = 3R$) est donné par

$$T = \int_R^{3R} \frac{dr}{\sqrt{2\alpha(r-R) + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}}$$

où μ désigne une constante positive associée à la force de gravitation.

i. Le temps de transfert T est-il fini dans le cas où $\alpha = \dfrac{2\mu}{R^2}$? Justifiez.

ii. Qu'en est-il si $\alpha = \dfrac{\mu}{R^2}$? Justifiez.

Question II

Étudiez l'intégrabilité de la fonction e^{-xy} sur

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0,1[,\ y \in]1,+\infty[\right\}$$

Question III

On considère le volume $\mathtt{E}$ décrit par

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,2R],\ y \in [0,2R],\ z \in [0,2R],\ Ry \le x^2 - 4Rx + 5R^2\right\}$$

où $R > 0$ désigne une constante.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ en expliquant votre construction.

ii. Calculez le volume de $\mathtt{E}$.

SOLUTION TYPE

Question I

Pour que le temps de transfert soit fini , il suffit que l'intégrale donnée existe, c'est-à-dire que la fonction f définie par

Temps fini si existence de l'intégrale : 2 pts

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha(r-R) + 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}}$$

soit intégrable sur $]R, 3R[$.

Notons que $f(r)$ s'écrit aussi

$$f(r) = \sqrt{\frac{rR}{2(r-R)(\alpha rR - \mu)}}$$

i. Si $\alpha = 2\mu/R^2$,

$$f(r) = \sqrt{\frac{rR^2}{2\mu(r-R)(2r-R)}} \in C_0(]R, 3R])$$

Il reste donc à envisager l'intégrabilité au voisinage de $r = R$.

Continuité sur $]R, 3R]$: 1 pt

On a

$$f(r) = \sqrt{\frac{rR^2}{2\mu(r-R)(2r-R)}} \sim \sqrt{\frac{R^2}{2\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{r-R}}, \quad (r \to R^+)$$

Intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(R)$: 2 pts

de sorte que f est intégrable au voisinage de R.

Conclusion : 1 pt

Dès lors, le temps de transfert est fini pour cette valeur de la poussée.

Total i. : 4 pts

ii. Si $\alpha = \mu/R^2$,

Continuité sur $]R, 3R]$: 1 pt

$$f(r) = \sqrt{\frac{rR^2}{2\mu(r-R)(r-R)}} \in C_0(]R, 3R])$$

Il reste donc à envisager l'intégrabilité au voisinage de $r = R$.

On a

Non-intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(R)$: 2 pts

$$f(r) = \sqrt{\frac{rR^2}{2\mu(r-R)(r-R)}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{2\mu}}\,\frac{1}{(r-R)}, \quad (r \to R^+)$$

de sorte que f n'est pas intégrable au voisinage de R.

Conclusion : 1 pt

Dès lors, le temps de transfert n'est pas fini pour cette valeur de la poussée.

Total ii. : 4 pts

TOTAL QI : 10 PTS

Question II

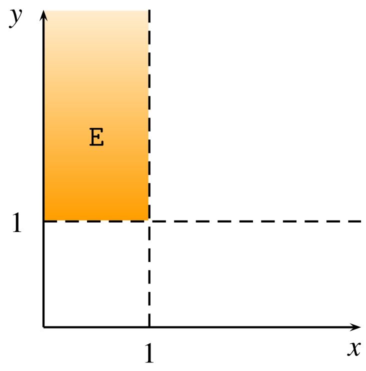
On se propose d'étudier l'existence de

$$I = \iint_{\mathtt{E}} \mathrm{e}^{-xy}\, dxdy$$

où

$$\mathtt{E} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1[,\ y \in]1, +\infty[\right\}$$

Le domaine d'intégration est représenté ci-dessous.



Comme le domaine est non borné, l'intégrabilité pourra être justifiée, en vertu du critère de Tonelli, si on trouve un ordre d'intégration partielle de $|\mathrm{e}^{-xy}| = \mathrm{e}^{-xy}$ qui existe.

Nous pouvons décrire le domaine en faisant varier x de 0 à 1 et y de 1 à $+\infty$, ce qui conduit à la réduction

$$\int_1^{+\infty} dy \int_0^1 \mathrm{e}^{-xy}\, dx$$

Réduction correcte : 2 pts

La première intégrale existe puisque, pour (presque) tout y dans $]1, +\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-xy} \in C_0([0,1])$$

Justification de la première intégrale : 2 pts

On calcule aisément

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-xy}\, dx = \left[\frac{-1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\right]_0^1 = \frac{1}{y}(1-\mathrm{e}^{-y})$$

Calcul de la première intégrale : 2 pts

Il faut ensuite examiner l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y}(1-\mathrm{e}^{-y})\, dy$$

Non-existence justifiée de la deuxième intégrale : 2 pts. Pas de point pour la continuité.

Remarquons d'abord que

$$\frac{1}{y}(1-\mathrm{e}^{-y}) \in C_0([1,+\infty[)$$

Il faut donc encore vérifier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ où on peut écrire

$$\frac{1}{y}(1-\mathrm{e}^{-y}) \sim \frac{1}{y}, \quad (y \to +\infty)$$

de sorte que cette intégrale n'existe pas.

Non-existence justifiée de I : 2 pts

Conclure sans faire appel à Fubini, sur la seule base de Tonelli, rapporte 1 pt sur les 2 pts.

Ne pas du tout parler de Tonelli mais seulement de Fubini en montrant qu'un ordre d'intégration partielle n'existe pas rapporte les 2 pts.

Le critère de Tonelli ne permet pas de conclure directement à la non-intégrabilité de e^{-xy} sur $\mathtt{E}$ car il ne donne qu'une condition suffisante d'intégrabilité. Nous pouvons cependant conclure que la fonction e^{-xy} n'est pas intégrable sur $\mathtt{E}$ puisque, si elle l'était, le théorème de Fubini nous assurerait l'existence des intégrales simples successives quel que soit l'ordre d'intégration partielle choisi.

TOTAL QII : 10 PTS

Question III

i. Soit

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,2R],\ y \in [0,2R],\ z \in [0,2R],\ Ry \leq x^2 - 4Rx + 5R^2\right\}$$

Ce domaine est compris dans le cube de côté $2R$ situé dans le premier quadrant. Il est également limité par le cylindre de génératrice parallèle à OZ (vu l'absence de la variable z dans l'équation de la surface) d'équation $Ry = x^2 - 4Rx + 5R^2$. Il s'agit d'un cylindre parabolique puisque l'intersection de la surface par tout plan $z =$ constante est la parabole $Ry = x^2 - 4Rx + 5R^2$.

Dans le plan $z = 0$, la parabole coupe le carré de côté $2R$ en deux points.

- En $x = 2R$, l'ordonnée de la parabole est $y = R$.
- En $y = 2R$, x vérifie

$$2R^2 = x^2 - 4Rx + 5R^2$$

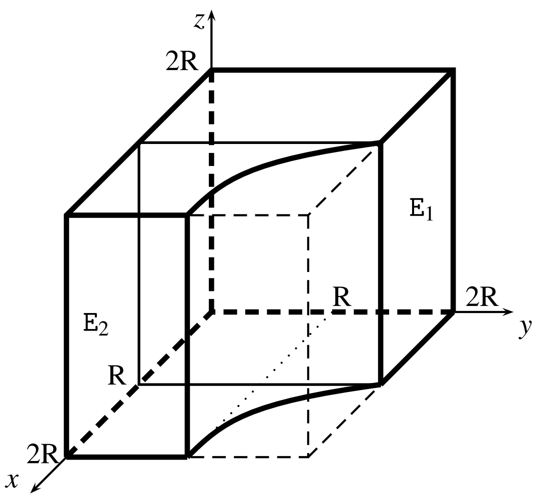
soit

$$x^2 - 4Rx + 3R^2 = 0$$

dont on ne retient que le zéro $x = R \leq 2R$.

Représentation graphique du domaine : 4 pts dont 2 pts pour la détermination des abscisses et ordonnées caractéristiques.

Dans le plan $z = 0$, les deux points d'intersection entre la parabole et le carré sont donc les points $(x,y) = (2R,R)$ et $(x,y) = (R,2R)$. Sur cette base, on peut représenter le domaine. Remarquons que c'est la partie du cube extérieure au cylindre parabolique qu'il faut retenir puisque, par exemple, le point $(0,0,0)$ se trouve dans $\mathtt{E}$.



Total i. : 4 pts

ii. Le volume du solide s'exprime par

Expression intégrale du volume : 1 pt

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

L'intégrale existe puisque l'intégrand est continu sur le compact $\mathtt{E}$. Elle peut donc être calculée dans n'importe quel ordre d'intégration partielle, en vertu du théorème de Fubini.

Existence de l'intégrale : 1pt

Pour décrire le domaine $\mathtt{E}$, il est nécessaire de le séparer en deux parties, $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ représentées ci-dessus.

Réduction de l'intégrale : 3 pts

- Le domaine $\mathtt{E}_1$ est un parallélépipède rectangle de côtés R, $2R$ et $2R$ dont le volume vaut $V_1 = 4R^3$.
- Sur $\mathtt{E}_2$,
  - ◇ x varie de R à $2R$;
  - ◇ pour x fixé, y varie de 0 à la parabole $Ry = x^2 - 4Rx + 5R^2$;
  - ◇ et, pour x et y fixés, z varie de 0 à $2R$.

On a donc *Calculs : 2 pts*

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_R^{2R} dx \int_0^{\frac{x^2}{R}-4x+5R} dy \int_0^{2R} dz \\ &= 2R \int_R^{2R} \left(\frac{x^2}{R} - 4x + 5R \right) dx \\ &= 2R \left[\frac{x^3}{3R} - 2x^2 + 5Rx \right]_R^{2R} \\ &= \frac{8R^3}{3} \end{aligned}$$

et finalement

$$V = V_1 + V_2 = 4R^3 + \frac{8R^3}{3} = \frac{20R^3}{3}$$

Valeur finale : 1 pt
Total ii. : 8 pts
TOTAL QIII *: 12 pts*

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

- La question portait sur l'existence de l'intégrale, pas sur son calcul. Il ne fallait donc pas perdre de temps en tentant de calculer le temps de transfert. Plus généralement, il faut bien lire l'énoncé pour éviter de se tromper de question…
- L'étude de l'intégrabilité commence toujours par l'identification de la partie du domaine d'intégration où l'intégrand est continu.
  L'intégrand faisant intervenir des puissances de r, il est nécessaire d'en simplifier l'expression afin d'expliciter les éléments apparaissant au dénominateur. Ici, ceci permet de mettre en évidence un seul problème au voisinage de R^+.
  On peut obtenir un comportement asymptotique de l'intégrand dans ce voisinage directement à partir de son expression simplifiée. L'intégrabilité se déduit ensuite des critère d'intégrabilité et de non-intégrabilité applicables à un domaine borné.
- La réponse attendue concerne le caractère fini ou non du temps de transfert. Il ne faut pas se contenter de dire si l'intégrale existe ou pas. Il faut faire le lien avec le temps de transfert.

Question II

- Le critère de Tonelli ne donne qu'une condition suffisante d'intégrabilité. Dès lors, on ne peut conclure à la non-intégrabilité si cette condition n'est pas vérifiée.
  Par contre, par la contraposée du théorème de Fubini, la non-existence de la suite d'intégrales partielles de la fonction constatée ici permet de conclure à la non-existence de l'intégrale double. En effet, si l'intégrale double existait, les intégrales partielles successives correspondantes existeraient quel que soit l'ordre d'intégration partielle choisi. Le résultat serait lui-même indépendant de cet ordre.
- Sauf dans le cas évident de l'intégration d'une fonction continue sur un compact, la vérification de l'intégrabilité d'une fonction de plusieurs variables passe généralement par l'appel au critère de Tonelli.
  L'examen séparé de l'intégrabilité de $f(x,y)$ par rapport à x sur le domaine de variation de x, d'une part, et par rapport à y sur le domaine de variation de y, d'autre part, ne constitue pas une justification de l'intégrabilité de f comme fonction de deux variables.
- Il ne faut pas se tromper de variable par rapport à laquelle on intègre. En particulier ici,

$$\int \mathrm{e}^{-xy}\,dy = \frac{-1}{x}\,\mathrm{e}^{-xy} + C \quad \text{et pas} \quad \frac{-1}{y}\,\mathrm{e}^{-xy} + C$$

Question III

i. -

ii.
- Il faut toujours justifier l'existence de l'intégrale calculée.
- Le domaine d'intégration peut être décrit de deux façons.
  La première approche, celle de la solution type, procède de façon additive. Dans ce cas, on décompose le volume en deux parties puisque la frontière selon x (ou selon y en fonction de

l'ordre d'intégration choisi) ne peut être décrite par une fonction unique mais bien par un segment de droite suivi d'un morceau de parabole.
Une approche alternative est possible en soustrayant au volume du cube le volume situé à l'intérieur du cylindre parabolique. Ce dernier peut être décrit de la façon suivante :
◇ x varie de R à $2R$;
◇ pour x fixé, y varie de la parabole $Ry = x^2 - 4Rx + 5R^2$ à $2R$;
◇ et, pour x et y fixés, z varie de 0 à $2R$.
On a donc aussi

$$V = 8R^3 - \int_R^{2R} dx \int_{\frac{x^2}{R}-4x+5R}^{2R} dy \int_0^{2R} dz$$

- Il est important de poser un regard critique sur tout résultat. En particulier ici, un résultat supérieur au volume du cube de côté $2R$, *i.e.* $8R^3$, n'a aucun sens. De même, les dimensions du résultat doivent être correctes. Un résultat proportionnel à R, R^2 ou R^4 ne peut représenter un volume. Le seul paramètre dimensionnel intervenant dans ce problème étant la longueur R, le volume doit être proportionnel à R^3.