Prof. Éric J.M.DELHEZ

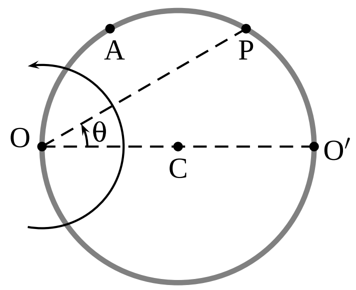
Avril 2024

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de trois heures.

Question I



Une particule P de masse m portant une charge q se déplace sur un rail circulaire horizontal tournant à vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe vertical passant par son point O (voir figure). La particule et le rail sont plongés dans une induction magnétique **B** verticale, constante, uniforme et telle que $qB/m\Omega = 2$.

i. Si la particule est lancée du point O′ (voir figure) dans le sens trigonométrique, le temps qu'elle met pour atteindre le point A ($\theta = \pi/3$) est donné par

$$T_A = \frac{2\sqrt{3}}{3\Omega} \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}$$

Montrez que ce temps est fini.

ii. Si la particule est lancée du point O′ dans le sens trigonométrique, le temps qu'elle met pour atteindre le point O ($\theta = \pi/2$) est donné par

$$T_O = \frac{1}{\sqrt{3}\Omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

Montrez que ce temps est infini, c'est-à-dire que la particule se rapprochera de plus en plus du point O sans jamais l'atteindre vraiment.

Question II

i. Le produit de deux fonctions intégrables au sens de Lebesgue est-il intégrable ? Justifiez.
ii. Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$? Justifiez.
iii. Soit $f \in \mathbb{L}_1(\mathrm{K})$ et $g \in C_0(\mathrm{K})$ où K est un compact de $\mathbb{R}^2$. Peut-on affirmer que $fg \in \mathbb{L}_1(\mathrm{K})$? Justifiez.

Tournez la page.

Question III

Calculez en justifiant

$$\int_0^1 dy \int_{2y}^2 \mathrm{e}^{-y/x}\, dx$$

Question IV

On considère la pyramide dont les sommets se trouvent dans un repère orthonormé aux points de coordonnées $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(a,a,0)$ et $(0,0,b)$, notés respectivement O, A, B, C et D.

i. Représentez la pyramide.

ii. Démontrez par le calcul intégral que le volume de cette pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Question I

i. Soit T_A, le temps mis pour effectuer le trajet de O′ ($\theta = 0$) à A ($\theta = \pi/3$). On a

$$T_A = \frac{2\sqrt{3}}{3\Omega} \int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}$$

Le temps T_A est fini si l'intégrale existe, c'est-à-dire si la fonction

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}}$$

est intégrable sur $]0, \pi/3[$.

Continuité sur $[0, \pi/3[$: 1 pt

On observe que $f \in C_0([0, \pi/3[)$. Il reste donc à envisager l'intégrabilité au voisinage de $\theta = \pi/3$. On a

Intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(\pi/3)$: 3 pts

$$4\cos^2\theta - 1 = (2\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) \sim 2(2\cos\theta - 1), \quad (\theta \to \pi/3)$$

De plus, la formule de Taylor permet d'écrire, puisque la fonction cosinus est réelle et indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\pi/3) - \sin(\pi/3)(\theta - \pi/3) + o(\theta - \pi/3)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\theta - \pi/3) + o(\theta - \pi/3), \quad (\theta \to \pi/3)\end{aligned}$$

soit

$$2\cos\theta - 1 \sim -\sqrt{3}(\theta - \pi/3), \quad (\theta \to \pi/3)$$

et

Conclusion T_A fini car l'intégrale existe : 1 pt

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta - 1}} \sim \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{\pi/3 - \theta}}, \quad (\theta \to \pi/3)$$

qui est intégrable au voisinage de $\pi/3$ de sorte que la fonction f l'est également.

Total i. : 5 pts

Dès lors, le temps T_A est fini.

ii. Soit T_O, le temps mis pour effectuer le trajet de O′ ($\theta = 0$) à O ($\theta = \pi/2$). On a

Non-intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(\pi/2)$: 3 pts

$$T_O = \frac{1}{\sqrt{3}\Omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

L'intégrande $f(\theta)$ est continu sur $[0, \pi/2[$ mais, au voisinage de $\pi/2$, on a

Conclusion T_O infini car l'intégrale n'existe pas : 1 pt

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

qui n'est pas intégrable, de sorte que T_O est infini.

Total ii. 4 pts

TOTAL QI : 9 PTS

Question II

i. Non, le produit de deux fonctions intégrables au sens de Lebesgue n'est pas toujours intégrable comme le montre le contre-exemple de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$$

alors que

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} \notin \mathbb{L}_1(]0,1[)$$

Total i. : 2 pts

ii. Non, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ n'est pas forcément intégrable sur $\mathbb{R}$ comme le montre le contre-exemple de la fonction $f(x) = x$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Total ii. : 2 pts

iii. La fonction g étant continue sur le compact K, elle est bornée sur K, *i.e.*

g bornée sur K : 1 pt

$$\exists C \geq 0 \ : \ |g(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathrm{K}$$

De là,

$$|f(x)g(x)| \leq C|f(x)| \quad \forall x \in \mathrm{K}$$

Enfin, puisque f est intégrable sur K, il en va de même de $|f|$ et le critère de Lebesgue assure alors l'intégrabilité de fg sur K.

$|f| \in \mathbb{L}_1(\mathrm{K})$: 1 pt
Appel au critère de Lebesgue : 2 pts

Total iv. : 4 pts

TOTAL QII : 8 PTS

Question III

L'expression

$$\int_0^1 dy \int_{2y}^2 \mathrm{e}^{-y/x}\, dx$$

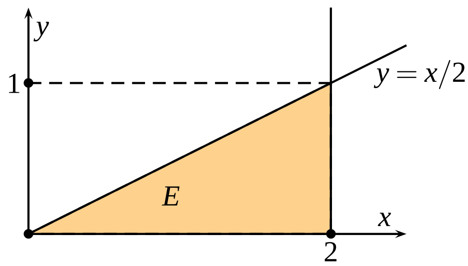
ne peut être calculée telle quelle puisqu'on ne connait pas de primitive de $\mathrm{e}^{-y/x}$ par rapport à x. Elle est cependant égale à l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathrm{E}} \mathrm{e}^{-y/x}\ dxdy \qquad \text{où} \quad \mathrm{E} = \{(x,y) : 0 < y < 1,\ 2y < x < 2\}$$

si celle-ci existe et elle pourra dans ce cas être calculée dans l'autre ordre d'intégration partielle (FUBINI).

Égalité avec l'intégrale dans l'autre ordre d'intégration partielle si l'intégrale double existe : 1 pt

Identification (mathématique ou graphique) du domaine : 2 pts



La fonction $\mathrm{e}^{-y/x}$ n'est pas continue sur $\bar{E}$, l'adhérence de E, puisqu'elle n'est pas définie au point $(0,0)$. L'intégrabilité pourra cependant être justifiée, en vertu du critère de Tonelli, si on trouve un ordre d'intégration partielle de $|\mathrm{e}^{-y/x}| = \mathrm{e}^{-y/x}$ qui existe.

Appel à Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale double : 1 pt

Application de Tonelli à f car $|f| = f$: 1 pt

En inversant l'ordre d'intégration proposé dans l'énoncé pour ce calcul, on est conduit à évaluer

Intégrale avec ordre inversé : 2 pts

$$\int_0^2 dx \int_0^{x/2} \mathrm{e}^{-y/x}\, dy \qquad (\spadesuit)$$

L'intégrale

Justification de l'existence de I_1 : 1 pt

$$I_1 = \int_0^{x/2} \mathrm{e}^{-y/x}\, dy$$

est définie puisque l'intégrande $\mathrm{e}^{-y/x}$ est continu sur le compact $[0, x/2]$ pour presque tout $x \in [0,2]$. Sa valeur est donnée par

Valeur de I_1 : 2 pts

$$I_1 = \left[-x\,\mathrm{e}^{-y/x}\right]_0^{x/2} = -x(\mathrm{e}^{-1/2} - 1)$$

En injectant cette valeur dans l'expression ($\spadesuit$), on est amené à considérer

$$I_2 = (1 - \mathrm{e}^{-1/2}) \int_0^2 x\, dx$$

L'intégrale I_2 est également définie en vertu de la continuité de l'intégrande x sur le compact $[0,2]$. Sa valeur est donnée par

Justification de l'existence de I_2 : 1 pts

$$I_2 = (1 - \mathrm{e}^{-1/2}) \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2(1 - \mathrm{e}^{-1/2}) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$$

Dès lors

Valeur de I : 2 pts

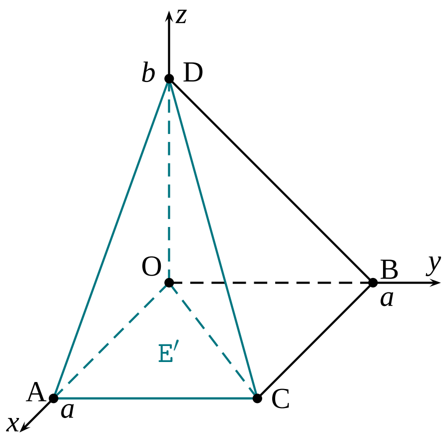
TOTAL QIII : 13 PTS

$$I = I_2 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$$

Question IV

i. La pyramide dont les sommets se trouvent aux points, notés respectivement O, A, B, C et D, de coordonnées $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(a,a,0)$ et $(0,0,b)$ est représentée ci-dessous.

Total i. : 1 pt, accordé si présence des dimensions a et b sur les axes



ii. La formule connue donnant le volume de cette pyramide permet de calculer

Calcul du volume par application de la formule : 1 pt

$$V = \frac{Bh}{3}$$

où $B = a^2$ est l'aire de la base carrée et $h = b$ la hauteur correspondante. On obtient donc

$$V = \frac{a^2 b}{3}$$

Vérifions cette formule par le calcul intégral. Le volume de la pyramide s'exprime par

Expression intégrale du volume : 1 pt

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz$$

où $\mathtt{E}$ est la pyramide.

La pyramide étant symétrique par rapport au plan OCD, son volume est égal au double du volume de la pyramide OACD. Le domaine d'intégration correspondant est noté $\mathtt{E}'$. Pour décrire $\mathtt{E}'$,

- x varie de 0 à a ;
- pour x fixé, y varie de 0 à la doite OC ;
- et, pour x et y fixés, z varie de 0 au plan ACD.

Réduction de l'intégrale : 3 pts

La droite OC est la diagonale de la base carrée. Elle a pour équation $y = x$ dans le plan $z = 0$. Le plan ACD est un plan parallèle à l'axe OY. Son équation est celle de la droite AD dans le plan $y = 0$, soit

$$z = -\frac{b}{a}x + b$$

On a donc

Calculs : 3 pts

$$\begin{aligned}
V =& 2\iiint_{\mathtt{E}'} dxdydz = 2\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{-\frac{b}{a}x+b} dz \\
=& 2\int_0^a dx \int_0^x \left(-\frac{b}{a}x + b\right) dy = 2\int_0^a \left(-\frac{b}{a}x^2 + bx\right) dx \\
=& 2\left[-\frac{b}{a}\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 2\left(-\frac{ba^2}{3} + \frac{ba^2}{2}\right) = \frac{a^2 b}{3}
\end{aligned}$$

Comme attendu, le volume est égal au produit de l'aire de la base et du tiers de la hauteur.

Total ii. : 8 pts

De façon alternative, on peut aussi décrire $\mathtt{E}$ en faisant varier z de 0 à b et en considérant que, pour une hauteur z donnée, x et y décrivent la section de la pyramide à cette hauteur. Cette section est un carré de côté az/b. On a donc

Même répartition des points pour la méthode alternative

$$\begin{aligned}
V =& \iiint_{\mathtt{E}} dxdydz = \int_0^b \left(\iint_{\text{carré de côté}\, az/b} dxdy\right) dz \\
=& \int_0^b \left(\frac{az}{b}\right)^2 dz = \frac{a^2}{b^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^b = \frac{a^2 b}{3}
\end{aligned}$$

TOTAL QIV : 9 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Il est important de s'exprimer correctement. On peut dire qu'une fonction est intégrable (*resp.* n'est pas intégrable) sur un domaine donné ou que l'intégrale de cette fonction sur ce domaine existe (*resp.* n'existe pas). Par contre, on ne peut pas écrire qu'une "intégrale est intégrable" ou qu'une "intégrale n'est pas intégrable".
- Quand on veut étudier l'existence d'une intégrale dans $\mathbb{R}$, il faut toujours commencer par étudier la continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration. Si ce domaine est un compact, la continuité sur ce compact suffit à justifier l'intégrabilité. Si nécessaire, il faut ensuite justifier l'intégrabilité au voisinage des points où l'intégrande n'est pas continu et au voisinage de l'infini si le domaine n'est pas borné.
- Cet exercice demandait d'examiner l'existence des intégrales données. Pour répondre à la question, il convient cependant de ne pas s'arrêter à cet examen. Il faut également énoncer explicitement le lien entre l'existence ou la non-existence des intégrales et la question posée : le temps exprimé par l'intégrale est fini si l'intégrale existe et infini dans le cas contraire.

i.
- Il n'était pas demandé de calculer le temps T_{A}. Si ce calcul de l'intégrale est réalisé dans le but de prouver que sa valeur est finie, il ne faut pas oublier de vérifier les hypothèses correspondantes. En effet, pour pouvoir justifier qu'une intégrale existe parce que sa valeur calculée est finie, il faut que l'intégrande soit continu sur l'ouvert d'intégration et qu'il soit réel de signe constant aux voisinages des bornes où la continuité n'est pas assurée.
- Dans cet exercice, la non-existence de l'intégrande en $\theta = \pi/3$ demandait la justification de l'intégrabilité au voisinage de $\pi/3$. Ceci pouvait être réalisé en déterminant un comportement asymptotique de l'intégrande dans ce voisinage en termes de fonctions dont l'intégrabilité est connue. La formule de Taylor, appliquée à la fonction $\cos\theta$ après factorisation comme dans la solution-type ou directement à la fonction $4\cos^2\theta - 1$, permettait d'obtenir le comportement asymptotique recherché. Il fallait évidemment travailler au voisinage de $\pi/3$. Le comportement connu de $\cos\theta$ au voisinage de 0 n'était pas utilisable ici.
- Lors de l'étude de l'intégrabilité, il faut faire apparaître le comportement asymptotique de l'intégrande en fonction de la variable d'intégration, pas d'une autre variable. En particulier, pour étudier l'intégrabilité au voisinage de 0, on ne peut remplacer l'étude du comportement asymptotique de $1/\sqrt{4\cos^2\theta - 1}$ par celui de $1\sqrt{x}$ au prétexte que les deux fonctions sont identiques si on pose $x = 4\cos^2\theta - 1$. Il est indispensable d'étudier le comportement de la fonction de la variable d'intégration θ.

ii.
- Une fois la continuité de l'intégrande sur $[0, \pi/2[$ vérifiée, il est possible de justifier la non-existence de l'intégrale en montrant que la limite d'une primitive de l'intégrande n'est pas finie pour $\theta \to \pi/2$. En effet, le théorème fondamental assure que les limites de la primitive sont finies si l'intégrale existe. Contrairement au point i., il n'y a pas ici d'hypothèse supplémentaire à vérifier.
- Le fait que l'intégrande tend vers l'infini pour $\theta \to \pi/2$ ne suffit pas à justifier la non-existence de l'intégrale. L'intégrale peut exister si l'intégrande "ne tend pas trop vite vers l'infini". Par exemple, la fonction $1/\sqrt{x}$ est intégrable au voisinage de 0.

Question II

i.
- Pour prouver qu'un énoncé est faux, il ne faut pas se contenter d'affirmer qu'il existe certainement des cas où il n'est pas vérifié... Il faut donner un contre-exemple précis. Ce contre-exemple n'a pas besoin d'être compliqué. Il est tout à fait permis de considérer une fonction unique $f = g$. Il faut cependant toujours montrer que l'exemple choisi vérifie les hypothèses et contredit la thèse.
- De nombreux essais incorrects de démonstration de l'énoncé ont été rencontrés dans les copies. En particulier, on rappellera que
  - ◇ une fonction intégrable n'est pas forcément bornée ;
  - ◇ l'intégrale d'un produit n'est pas égale au produit des intégrales.

ii.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ est ouvert. Ce n'est pas un compact. On ne peut donc pas affirmer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Ce n'est pas parce que $\mathbb{R}$ est ouvert qu'une fonction ne peut pas être intégrable sur $\mathbb{R}$.
- L'énoncé est faux. Ceci doit être prouvé en donnant un contre-exemple. Il faut veiller à choisir un contre-exemple correct qui vérifie les hypothèses et contredit la thèse. On notera par exemple que les fonctions $1/x$ ou $\operatorname{tg} x$ ne conviennent pas puisqu'elles ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$.

iii.
- Ce troisième énoncé est vrai et peut être démontré en faisant appel au critère de Lebesgue qui dit qu'une fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable. Dans le produit fg, d'une part, f est intégrable de sorte que $|f|$ est également intégrable. D'autre part, g est continue sur K donc bornée sur ce compact. Combinant ces deux résultats, on a $|fg| \leq C|f| \in \mathbb{L}_1(\mathrm{K})$ de sorte que, en vertu du critère de Lebesgue, $fg \in \mathbb{L}_1(\mathrm{K})$.
- Une fonction intégrable sur un compact n'est pas forcément continue sur ce compact. Par exemple, la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ n'est pas continue sur $[0,1]$ alors qu'elle est intégrable sur ce domaine.
- L'énoncé i. est faux et ne peut donc pas être utilisé pour justifier que, f et g étant intégrables sur K (puisque $g \in C_0(\mathrm{K})$), leur produit l'est aussi.
- Le fait que l'énoncé i. est faux ne permet pas d'affirmer que cet énoncé iii. l'est également. En effet, l'énoncé iii. concerne le cas particulier d'un compact.

Question III

- L'intégrale proposée ne peut pas être calculée telle quelle. Il est donc indispensable de changer l'ordre d'intégration. Le théorème de Fubini garantit que le changement d'ordre d'intégration ne change pas la valeur de l'intégrale si l'intégrale double existe. Il faut donc justifier l'existence de cette intégrale double. Ceci demande de faire appel au critère de Tonelli puisque l'intégrande n'est pas défini en $(0,0)$. Ces justifications théoriques sont importantes et attendues. Les calculs, même corrects, ne suffisent pas.
- Le critère de Tonelli affirme que l'intégrale existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a du sens. Même si l'intégrande est manifestement positif, il ne faut pas oublier de mentionner que $|f| = f$ et que la justification de l'existence de l'intégrale peut dès lors être réalisée sur base de f, en même temps que le calcul.

- Le critère de Tonelli demande qu'on justifie l'existence des premières intégrales pour presque toutes les valeurs des variables par rapport auxquelles l'intégration sera réalisée ultérieurement. Ici, il suffisait donc de justifier l'intégrale par rapport à y pour $x \neq 0$, ce qui garantissait la continuité de l'intégrande sur $[0, x/2]$.
- La représentation du domaine d'intégration est nécessaire. Elle permet en général de vérifier si le domaine est borné et de réduire correctement l'intégrale. Dans cet exercice particulier, elle permet de déterminer les nouvelles bornes d'intégration résultant du changement d'ordre d'intégration partielle.

Question IV

- La représentation graphique précise du domaine d'intégration facilite grandement la réduction de l'intégrale. Pour pouvoir raisonner quantitativement, il est nécessaire de faire apparaître les coordonnées a et b sur les axes.
- La description du domaine demande de considérer une première variable dont les bornes sont des constantes puis une deuxième variable dont les bornes peuvent dépendre de la valeur de la première variable et enfin, la troisième variables dont les bornes peuvent dépendre des valeurs des deux premières. Considérer dans cet exercice que les bornes des 3 variables sont des constantes revient à calculer le volume d'un parallélépipède rectangle et pas d'une pyramide.
- La pyramide pouvait également être considérée comme un empilement de carrés dont la longueur du côté diminuait avec la coordonnée z. Considérer un côté de longueur constante revenait à décrire un parallélépipède rectangle plutôt qu'une pyramide.