LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Avril 2023

MATH0502 - Analyse Mathématique 2

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.

Question I

Un satellite est initialement en rotation sur une orbite circulaire de rayon a autour de la terre. À un instant donné, on allume les propulseurs à poudre dont il est pourvu afin de lui faire atteindre une orbite de rayon $R > a$. Le temps de transfert entre les deux orbites est donné par

$$T = \int_a^R \frac{2r\,dr}{\sqrt{\mu a}\left(2 - \frac{r}{a}\right)\sqrt{\frac{r}{a} - 1}}$$

où $\mu > 0$ est une constante. Pourra-t-il atteindre en un temps fini une orbite de rayon $R = 3a/2$?
Qu'en est-il du temps nécessaire pour atteindre une orbite de rayon $R = 2a$?

Question II

Calculez en justifiant

$$I = \iint_{\mathrm{E}} e^{-x^2 y}\,dxdy \quad \text{où} \quad \mathrm{E} = \{(x,y) : x > 0, y > 1/x^3\}$$

Question III

Une plaque Σ homogène en forme de demi-disque de rayon R, de masse par unité de surface ρ et de masse m est suspendue par un de ses coins. Dans sa position d'équilibre, son centre d'inertie C est situé à la verticale du point d'attache. On demande de déterminer l'angle α que fait le côté rectiligne de la plaque avec la verticale dans cette configuration (Fig. 1) et de montrer que celui-ci ne dépend pas des caractéristiques du demi-disque.

Pour ce faire, on suggère d'utiliser des axes de coordonnées cartésiennes alignés sur la plaque (Fig. 2). Les lois de la physique assurent que le centre d'inertie se trouve sur l'axe de symétrie de la plaque et que sa coordonnée y_c est donnée par

$$y_c = \frac{\iint_\Sigma \rho\, y\, dxdy}{m}$$

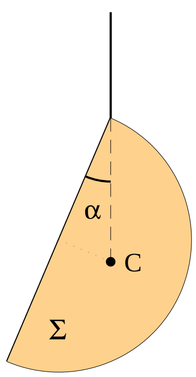


Figure 1

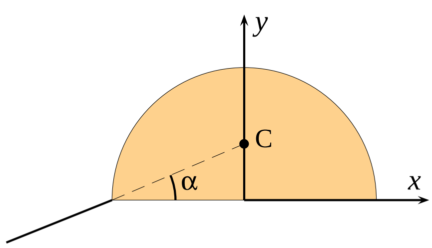


Figure 2

Question I

Soit

$$T = \int_a^R \frac{2r\,dr}{\sqrt{\mu a}\left(2-\dfrac{r}{a}\right)\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}}$$

Pour que le temps de transfert T soit fini, il suffit que l'intégrale existe, c'est-à-dire que la fonction f définie par

Temps fini si existence de l'intégrale : 1 pt

$$f(r) = \frac{2r}{\sqrt{\mu a}\left(2-\dfrac{r}{a}\right)\sqrt{\dfrac{r}{a}-1}}$$

soit intégrable sur $]a,R[$.

Notons que $f(r)$ s'écrit aussi

$$f(r) = \frac{2ra}{\sqrt{\mu}(2a-r)\sqrt{r-a}}$$

- Dans le cas où $R = 3a/2$, on observe que

$$f \in C_0(]a,3a/2])$$

Continuité sur $]a,3a/2]$: 1 pt

Il reste donc à envisager l'intégrabilité au voisinage de $r = a$. On a

Intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(a)$: 3 pts

$$f(r) = \frac{2ra}{\sqrt{\mu}(2a-r)\sqrt{r-a}} \sim \frac{2a}{\sqrt{\mu}}\,\frac{1}{\sqrt{r-a}}, \quad (r \to a^+)$$

de sorte que f est intégrable au voisinage de a.

Dès lors, le temps de transfert est fini pour cette valeur du rayon de l'orbite finale.

Conclusion si $R = 3a/2$: 1 pt

- Dans le cas où $R = 2a$, on observe que

$$f \in C_0(]a,2a[)$$

L'intégrabilité au voisinage de $r = a$ ayant été justifiée ci-dessus, il reste à envisager l'intégrabilité au voisinage de $r = 2a$.
On a

Non-intégrabilité justifiée dans $\mathcal{V}(2a)$: 3 pts

$$f(r) = \frac{2ra}{\sqrt{\mu}(2a-r)\sqrt{r-a}} \sim \frac{4a^2}{\sqrt{\mu a}}\,\frac{1}{2a-r}, \quad (r \to 2a)$$

de sorte que f n'est pas intégrable au voisinage de $2a$.

Dès lors, le temps de transfert n'est pas fini pour cette valeur du rayon de l'orbite finale.

Conclusion si $R = 2a$:1 pt

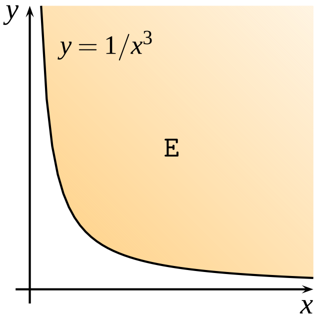
TOTAL QI : 10 PTS

Question II

Soit
$$I=\iint_{\mathtt{E}} \mathrm{e}^{-x^2y}\,dxdy \quad \text{où} \quad \mathtt{E}=\{(x,y) : x>0, y>1/x^3\}$$

Le domaine $\mathtt{E}$ peut être décrit

- en faisant varier x de 0 à $+\infty$;
- et, pour x fixé, y de $1/x^3$ à $+\infty$.



Le domaine étant non borné, il est nécessaire de faire appel au critère de Tonelli pour justifier l'existence de l'intégrale. L'intégrande étant positif sur le domaine d'intégration, ce critère permet d'assurer l'existence de l'intégrale par l'existence d'un ordre d'intégration partielle qui a du sens.

Appel à Tonelli avec $|f|=f$: 1 pt

Choisissant d'intégrer d'abord par rapport à y, puisque e^{-x^2y} ne possède pas de primitive en x s'exprimant au moyen de fonctions usuelles, on a

Réduction de I (quel que soit l'ordre) : 2 pts

$$I=\int_0^{+\infty} dx \int_{1/x^3}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2y}\,dy = \int_0^{+\infty} \left[\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2y}\right]_{1/x^3}^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2y}\right)+\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\right] dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,dx$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-1/x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-1/x}\right) - \lim_{x\to0^+}\left(\mathrm{e}^{-1/x}\right) = 1$$

Calculs successifs et résultat : 3 pts

Les deux intégrales partielles existent car

- $\mathrm{e}^{-x^2y} \in C_0([1/x^3,+\infty[) \ \ \forall x>0 \quad \text{et} \quad \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} \in C_0(]0,+\infty[)$
- Les intégrandes sont réels et de signe constant au voisinage de chacune de leurs bornes d'intégration.
- Les primitives admettent des limites finies.

Première intégrale :

Continuité : 1 pt, dont 0.5 pt pour la précision $x \neq 0$ ou $x>0$

Justification de l'intégrabilité au voisinage de l'infini : 1 pt

L'intégrale existe donc et sa valeur, qui peut être calculée dans n'importe quel ordre en vertu du Théorème de Fubini, vaut 1.

Remarquons que l'intégrabilité au voisinage de l'infini dans la première intégrale partielle peut également être justifiée en remarquant que

$$\mathrm{e}^{-x^2y} = o\left(\frac{1}{y^2}\right), \quad (y\to+\infty)$$

Notons aussi, que, pour la seconde intégrale, on a

$$\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} \sim \frac{1}{x^2}, \quad (x\to+\infty)$$

Deuxième intégrale :

Continuité : 1 pt

Justification de l'intégrabilité au voisinage de l'infini : 0.5 pt

Justification de l'intégrabilité au voisinage de 0 : 0.5 pt ce qui justifie également l'intégrabilité au voisinage de l'infini. Par ailleurs, l'intégrande admet le prolongement continu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{u\to+\infty} u^2\,\mathrm{e}^{-u} = 0$$

de sorte qu'il est intégrable au voisinage de 0.

TOTAL QII : 10 PTS

Question III

On a

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y_c}{R}$$

Relation entre l'angle α et y_c : 1 pt

avec

$$y_c = \frac{\iint_\Sigma \rho\, y\, dxdy}{m} = \frac{\iint_\Sigma \rho\, y\, dxdy}{\rho\pi R^2/2} = \frac{2}{\pi R^2}\iint_\Sigma y\, dxdy$$

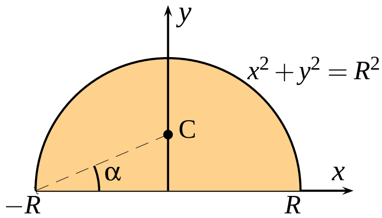
puisque, pour un demi-disque homogène de masse par unité de surface ρ, on a

Masse de la plaque : 1 pt

$$m = \rho\frac{\pi R^2}{2}$$

Le domaine Σ peut être décrit

- en faisant varier x de $-R$ à R ;
- et, pour x fixé, y de 0 au cercle $x^2+y^2=R^2$, soit $y=\sqrt{R^2-x^2}$.



Réduction de l'intégrale double : 2 pts

On a donc successivement

Calculs : 3 pts

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{2}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\, dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\, dx = \frac{1}{\pi R^2}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} \\ &= \frac{1}{\pi R^2}\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{1}{\pi R^2}\frac{4R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi} \end{aligned}$$

L'angle α est donc donné par

$$\alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{y_c}{R} = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3\pi}$$

Valeur exacte simplifiée (sans R, m ou ρ) de l'angle α : 1 pt

Celui-ci ne dépend pas des caractéristiques R et ρ du demi-disque.

TOTAL QIII : 8 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

- Cet exercice demandait d'examiner l'existence de l'intégrale. Pour répondre à la question, il convient cependant de ne pas s'arrêter à cet examen. Il faut également énoncer explicitement le lien entre l'existence de l'intégrale et la question posée : le temps de transfert est fini si et seulement si l'intégrale qui permet de calculer ce temps de transfert existe.
- Il n'était pas demandé de calculer le temps de transfert. Si ce calcul de l'intégrale est réalisé dans le but de prouver que sa valeur est finie, il ne faut pas oublier de vérifier les hypothèses correspondantes. En effet, pour pouvoir justifier qu'une intégrale existe parce que sa valeur calculée est finie, il faut que l'intégrande soit réel, qu'il soit continu sur l'ouvert d'intégration et qu'il soit de signe constant aux voisinages des bornes où la continuité n'est pas assurée.

Question II

- Le critère de Tonelli affirme que l'intégrale existe si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de la fonction en module qui a du sens. Même si l'intégrande est manifestement positif, il ne faut pas oublier de mentionner que $|f| = f$ et que la justification de l'existence de l'intégrale peut dès lors être réalisée sur base de f, en même temps que le calcul.
- Le critère de Tonelli demande qu'on justifie l'existence des premières intégrales pour presque toutes les valeurs des variables par rapport auxquelles l'intégration sera réalisée ultérieurement. Ici, il suffisait donc de justifier l'intégrale par rapport à y pour $x \neq 0$, ce qui garantissait la continuité de l'intégrande en $y = 1/x^3$.
- Une intégrale partielle peut être justifiée au moyen des critères d'intégrabilité avant son calcul. Elle peut aussi être justifiée en se basant sur la primitive en même temps que le calcul. Dans ce cas, il faut vérifier certaines hypothèses : l'intégrande doit être réel, il doit être continu sur l'ouvert d'intégration et il doit être de signe constant aux voisinages des bornes où la continuité n'est pas assurée. Ce n'est que si ces hypothèses sont remplies que l'existence des limites finies d'une primitive permet de justifier l'existence de l'intégrale. Il est important de vérifier ces hypothèses.
- Ce n'est pas parce que l'intégrande présente une limite finie en une borne d'intégration qu'il est intégrable au voisinage de cette borne. La fonction $1/x$ est telle que
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$
  mais n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.
  Ici, on a
  $$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 y} = 0 \;\not\Rightarrow\; \mathrm{e}^{-x^2 y} \text{ intégrable au } V(+\infty)$$
  Pour justifier correctement l'intégrabilité au voisinage de l'infini, il faut faire appel aux critères d'intégrabilité. On peut montrer que l'intégrande se comporte mieux qu'une fonction intégrable dans ce voisinage. De façon alternative, on peut aussi réaliser le calcul et vérifier que les hypothèses sont remplies (voir item précédent) pour pouvoir déduire de la limite finie de la primitive que l'intégrale existe.

Question III

- Il était demandé de prouver que la valeur de l'angle α ne dépendait pas des caractéristiques du demi-disque. Il était donc nécessaire d'exprimer la masse du demi-disque en fonction de son rayon et de sa masse surfacique afin de simplifier l'expression de α.
- La plaque est en forme de demi-disque. Son aire vaut donc $\pi R^2/2$ et pas πR^2 qui est l'aire du disque correspondant.
- La réduction de l'intégrale sur le demi-disque doit être menée correctement. On peut considérer que, pour décrire le demi-disque, x varie de $-R$ à R, puis que, pour x fixé, y varie de 0 au cercle, c'est-à-dire à $\sqrt{R^2-x^2}$, expression qui dépend de x. Faire varier x de $-R$ à R puis y de 0 à R ne décrit pas un demi-disque mais un rectangle.
- Puisque le domaine et l'intégrande sont symétriques par rapport à l'axe OY, il est aussi possible de calculer l'intégrale sur la moitié de la plaque seulement. Dans ce cas, il ne faut pas d'oublier de multiplier par 2 le résultat obtenu pour obtenir la valeur de l'intégrale sur la plaque entière.
- Les coordonnées polaires pouvaient aussi être utilisées pour calculer l'intégrale.