Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2023

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Définissez mathématiquement le concept de convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle $\mathtt{I}$ et introduisez la notation correspondante.

ii. Dans le cas où $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}|/|a_k| = a > 0$, montrez que la série obtenue en dérivant terme à terme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ possède le même intervalle de convergence que la série de départ.

iii. Si $f \in C_0([a,+\infty[)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, peut-on en déduire que $f \in \mathbb{L}_1(]a,+\infty[)$? Justifiez.

iv. On considère la portion de cardioïde décrite en coordonnées polaires par $r = a(1+\cos\theta)$ où a est une constante strictement positive et où $\theta \in]-\pi/2,\pi/2[$.

(a) Déterminez l'expression en fonction de θ de la tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la cardioïde.

(b) Déterminez l'expression en fonction de θ de l'abscisse curviligne s mesurée à partir du point de la cardioïde correspondant à $\theta = 0$.

Question II

Étudiez la convergence des séries suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}_0$. Justifiez.

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k-1)!}$

iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{\alpha^k}$

iv. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^\beta + k^{\beta^2})}$

Question III

On considère

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b\exp\frac{x}{a}} f^2(y)dy$$

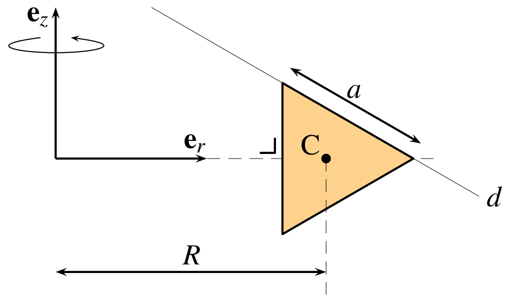
où a et b sont des constantes réelles strictement positives.

Inversez l'ordre d'intégration et montrez que ce changement d'ordre d'intégration ne modifie pas la valeur de l'intégrale si

$$f \in C_0(]0,+\infty[) \quad \text{et} \quad f(y) \sim \frac{1}{y^\beta},\ (y \to 0) \quad \text{avec} \quad \beta < \frac{1}{2}$$

Question IV

On construit un joint torique par la rotation autour d'un axe vertical d'un triangle équilatéral homogène de côté a disposé tel que représenté ci-dessous. Le centre de gravité C du triangle se trouve à une distance R de l'axe de rotation.



i. Montrez que l'équation de la droite d supportant le côté supérieur du triangle est donnée par

$$r(z) = R + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}z$$

ii. Calculez le volume du joint en utilisant le calcul intégral.

iii. Montrez que le volume calculé est égal à l'aire du triangle multipliée par le périmètre du cercle généré par la rotation du centre de gravité du triangle autour de l'axe vertical.

iv. Calculez l'aire de la surface totale (3 faces) du joint.

SOLUTION TYPE

Question I

i. On dit de la suite des fonctions f_k qu'elle converge uniformément vers une fonction f sur un ensemble $\mathtt{I}$, ce qui se note $f_k \overset{\mathtt{I}}{\Longrightarrow} f$, lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ii. D'une part, en appliquant le critère du quotient à la série des modules $\sum_k |a_k x^k|$, on établit que l'intervalle de convergence $\mathtt{I}$ de cette série est décrit par

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = a|x| < 1$$

soit $\mathtt{I} =]-1/a, 1/a[$.

D'autre part, la série obtenue par dérivation terme à terme est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_k x^k\right)\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$$

Il s'agit encore d'une série de puissances dont l'intervalle de convergence $\mathtt{I}'$ est décrit, par application du même critère du quotient, par

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}(k+1)x^k|}{|a_k k x^{k-1}|} = |x| \lim_{k\to\infty} \left(\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}\ \frac{k+1}{k}\right) = a|x| < 1$$

de sorte que $\mathtt{I}' =]-1/a, 1/a[$.
L'intervalle de convergence de la série des dérivées est donc identique à celui de la série de départ.

iii. Non, comme le montre le contre-exemple de la fonction $f(x) = 1/x$ qui est continue sur $[1, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ mais n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$.

iv. (a) La courbe admet la paramétrisation

$$\mathbf{s}(\theta) = r(\theta)\mathbf{e}_r = a(1+\cos\theta)\,\mathbf{e}_r, \quad \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

La tangente à la courbe est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{s}'(\theta)}{\|\mathbf{s}'(\theta)\|}$$

On a

$$\mathbf{s}'(\theta) = -a\sin\theta\,\mathbf{e}_r + a(1+\cos\theta)\,\mathbf{e}_\theta$$

et

$$\begin{aligned}\|\mathbf{s}'(\theta)\| &= a\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1} = a\sqrt{2+2\cos\theta} \\ &= a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = 2a\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

puisque $\cos(\theta/2) > 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
On a donc

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \frac{-a\sin\theta\,\mathbf{e}_r + a(1+\cos\theta)\mathbf{e}_\theta}{2a\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{-2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_r + 2a\cos^2\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_\theta}{2a\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= -\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_r + \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

(b) L'abscisse curviligne d'origine $\theta = 0$ est donnée par

$$s(\theta) = \int_0^{\theta} \|\mathbf{s}'(t)\| dt = \int_0^{\theta} 2a\cos\frac{t}{2} dt = 4a\left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\theta} = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

Question II

i. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$$

Appliquons le critère de la racine à cette série à termes positifs.

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k} = 0 < 1$$

La série est donc convergente.

ii. Soit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k-1)!}$$

Appliquons le critère du quotient à la série des modules correspondant à cette série alternée.

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\pi^{2k+2}}{\pi^{2k}} \frac{(2k-1)!}{(2k+1)!} = \pi^2 \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k)} = 0 < 1$$

La série converge donc absolument.

iii. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{\alpha^k}$$

Vu que $\cos(k\pi) = (-1)^k$, cette série peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\alpha^k}$$

Appliquons le critère du quotient à la série des modules correspondant à cette série (alternée).

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} = \left[\frac{1}{\alpha}\right]^+$$

Nous en concluons que la série converge absolument si $\alpha > 1$ et qu'elle diverge si $\alpha \in]0,1]$. Remarquons que nous pouvons conclure à la divergence de la série si $\alpha \leq 1$ car la divergence de la série des modules a été démontrée en utilisant le critère du quotient.
De façon alternative, on peut calculer

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{\alpha^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{\exp(k\ln\alpha)} \neq 0 \quad \text{si} \quad \alpha \leq 1$$

de sorte que la série diverge si $\alpha \leq 1$.
Par ailleurs, on a

$$\left|\frac{k\cos k\pi}{\alpha^k}\right| \leq \frac{k}{\alpha^k}, \quad \forall k \geq 1$$

Le critère de comparaison montre donc que la série converge si $\alpha > 1$ puisque son terme général est majoré en module par celui d'une série convergente (voir application du critère du quotient ci-dessus).

iv. Soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^{\beta}+k^{\beta^2})}$$

Le terme général de cette série à termes positifs est tel que

$$\frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^{\beta}+k^{\beta^2})} \sim \frac{\ln k}{k^{1+\beta+\beta^2}}, \quad (k \to +\infty)$$

- Si $1+\beta+\beta^2 > 1$, c'est-à-dire $\beta+\beta^2 > 0$,

  $$\frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^{\beta}+k^{\beta^2})} = o\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right), \quad (k \to +\infty)$$

  avec $\alpha > 1$, par exemple en choisissant $\alpha = (1+\beta+\beta^2+1)/2$.
  La série converge donc si $\beta+\beta^2 > 0$.

- Si $1+\beta+\beta^2 \leq 1$, c'est-à-dire $\beta+\beta^2 \leq 0$, on a

  $$\frac{1}{k} = o\left(\frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^{\beta}+k^{\beta^2})}\right), \quad (k \to +\infty)$$

  puisque

  $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{\ln k}{k^{\beta+1}(2^{\beta}+k^{\beta^2})}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{\frac{\ln k}{k^{1+\beta+\beta^2}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\beta+\beta^2}}{\ln k} = 0$$

  La série est alors divergente.

Dès lors, la série converge si $\beta+\beta^2 = \beta(\beta+1) > 0$, soit si

$$\beta \in]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$$

et diverge pour toutes les autres valeurs de $\beta \in R_0$.

Question III

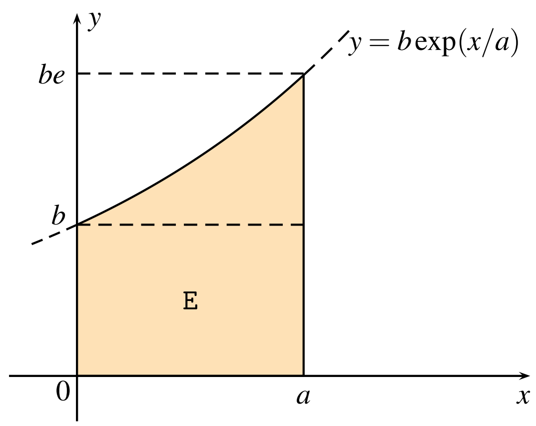
Soit

$$I = \int_0^a dx \int_0^{b\exp\frac{x}{a}} f^2(y)dy \qquad (\dagger)$$

Le théorème de Fubini nous apprend que la valeur de I n'est pas modifiée en changeant l'ordre d'intégration si l'intégrale double existe. Cette intégrale double s'écrit

$$\iint_{\mathtt{E}} f^2(y)\, dxdy \qquad \text{avec} \qquad \mathtt{E} = \left\{(x,y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\exp\frac{x}{a}\right\}$$

où E est représenté ci-dessous.



Pour changer l'ordre d'intégration, le domaine doit être décrit en deux parties en faisant varier

- y de 0 à b, et, pour y fixé, x de 0 à a ;

- puis, y de b à be, et, pour y fixé, x de la courbe $y = b\exp(x/a)$, c'est-à-dire $x = a\ln(y/b)$, à a.

Ceci conduit à l'inversion de l'ordre d'intégration sous la forme

$$\tilde{I} = \int_0^b dy \int_0^a f^2(y)dx + \int_b^{be} dy \int_{a\ln(y/b)}^a f^2(y)dx \qquad (\ddagger)$$

D'après le critère de Tonelli, l'intégrale double existe si on peut justifier un ordre d'intégration partielle de l'intégrande en module. Ici, $|f^2(y)| = f^2(y)$ de sorte qu'il suffit de justifier un ordre d'intégration partielle (†) ou (‡) pour que l'intégrale double existe.

Ne connaissant pas l'expression de $f(y)$, il n'est pas possible de calculer la première intégrale partielle dans (†), et donc de justifier l'intégrabilité du résultat de cette intégration. On étudie donc l'intégrabilité sur base de (‡).

On a $\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2$ où

$$\tilde{I}_1 = \int_0^b f^2(y)\,dy \int_0^a dx \quad \text{et} \quad \tilde{I}_2 = \int_b^{be} f^2(y)\,dy \int_{a\ln(y/b)}^a dx$$

L'intégrale $\tilde{I}_1$ est égale au produit des deux intégrales simples par rapport à x et y puisque les bornes d'intégration sont constantes et que l'intégrande ne dépend que de y. L'intégrale par rapport à x existe puisque $1 \in C_0([0,a])$. L'intégrale par rapport à y existe aussi puisque

$$f^2(y) \in C_0(]0,b]) \quad \text{et} \quad f^2(y) \sim \frac{1}{y^{2\beta}},\ (y \to 0^+) \text{ avec } 2\beta < 1$$

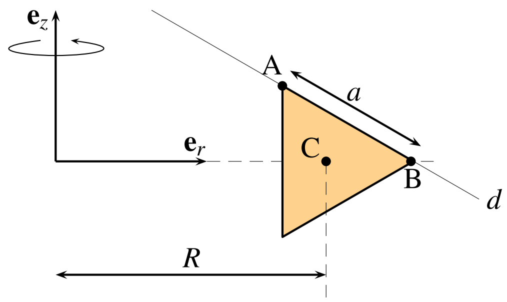
L'intégrale par rapport à x dans $\tilde{I}_2$ existe puisque $1 \in C_0([a\ln(y/b), a])$ pour presque tout (et même tout) $y \in [b, be]$. Calculant cette intégrale, il vient

$$\tilde{I}_2 = \int_b^{be} f^2(y)\left[a - a\ln(y/b)\right] dy$$

Cette intégrale existe puisque
$$f^2(y)\left[a - a\ln(y/b)\right] \in C_0([b, be])$$

En conclusion, le changement d'ordre d'intégration ne modifie pas la valeur de I puisque l'intégrale double existe.

Question IV



i. Vérifions que la droite d d'équation

$$r(z) = R + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}z$$

passe par les points $(r,z) = (r_A, a/2)$ et $(r,z) = (r_B, 0)$, ce qui détermine complètement la droite (voir figure).

Soit $h = a\sqrt{3}/2$, la hauteur du triangle. Puisque le centre de gravité du triangle est situé au tiers (mesuré à partir du côté) de la hauteur, on a

$$r_A = R - \frac{h}{3} = R - \frac{\sqrt{3}}{6}a > 0 \quad \text{(voir figure)}$$
$$r_B = R + \frac{2h}{3} = R + \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation de la droite, on calcule

$$r(a/2) = R + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \sqrt{3}\frac{a}{2} = R - \frac{\sqrt{3}}{6}a$$
$$r(0) = R + \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

L'équation de la droite d est donc correcte.

ii. La symétrie de révolution du joint, noté $\mathtt{E}$, autour de l'axe vertical conduit naturellement à utiliser des coordonnées cylindriques pour étudier ce problème. La symétrie par rapport au plan horizontal conduit aussi à ne calculer explicitement que le volume de la moitié supérieure $\mathtt{E}'$ du joint puis à multiplier ce résultat par 2. En coordonnées cylindriques, le domaine est décrit par

$$\mathtt{E}' = \{(r, \theta, z) : 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le a/2,\ r_A \le r \le r(z)\}$$

En prenant en compte le Jacobien $J = r$ associé au changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\mathtt{E}} dx\,dy\,dz = 2\iiint_{\mathtt{E}'} dx\,dy\,dz \\
&= 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{2}} dz \int_{R-\frac{a\sqrt{3}}{6}}^{R+\frac{\sqrt{3}}{3}a-\sqrt{3}z} r\,dr = 4\pi\int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R-\frac{a\sqrt{3}}{6}}^{R+\frac{\sqrt{3}}{3}a-\sqrt{3}z} dz \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}} \left[\left(R+\frac{\sqrt{3}}{3}a-\sqrt{3}z\right)^2 - \left(R-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\right] dz \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}} \left(3z^2+R^2+\frac{a^2}{3}-2\sqrt{3}Rz-2az+aR\frac{2\sqrt{3}}{3}-R^2-\frac{a^2}{12}+aR\frac{\sqrt{3}}{3}\right) dz \\
&= 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}} \left(3z^2-2z(\sqrt{3}R+a)+\frac{a^2}{4}+\sqrt{3}aR\right) dz \\
&= 2\pi\left[z^3-z^2(\sqrt{3}R+a)+z\left(\frac{a^2}{4}+\sqrt{3}aR\right)\right]_0^{\frac{a}{2}} \\
&= 2\pi\left[\frac{a^3}{8}-\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}R+a)+\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\sqrt{3}aR\right)\right] \\
&= \pi R a^2\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat a bien les dimensions d'un volume.

iii. L'aire du triangle équilatéral de côté a vaut

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Le périmètre du cercle généré par la rotation du centre de gravité du triangle autour de l'axe vertical est donné par $2\pi R$.

Le produit de ces deux grandeurs est bien égal au volume $\pi R a^2\sqrt{3}/2$ calculé ci-dessus.

iv. La surface latérale du joint peut être décomposée en 3 parties : Σ_1, la partie inclinée supérieure du joint, Σ_2, la partie inclinée inférieure et Σ_3, la partie verticale.

L'aire de Σ_3 est l'aire latérale du cylindre circulaire droit de rayon r_A et de hauteur a, soit

$$A_3 = 2\pi r_A a = 2\pi a\left(R-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$$

Remarquons que ce résultat a bien les dimensions d'une aire et est strictement positif puisque $r_A > 0$.

Les parties inférieure et supérieure du joint ont la même aire ($A_1 = A_2$). La symétrie de révolution suggère encore d'utiliser une paramétrisation de Σ_1 basée sur les coordonnées cylindriques. Le vecteur position d'un point de la surface est donné par

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(\theta,z) &= r(z)\,\mathbf{e}_r(\theta)+z\,\mathbf{e}_z \\
&= \left(R+\frac{\sqrt{3}}{3}a-\sqrt{3}z\right)\mathbf{e}_r(\theta)+z\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad \theta\in[0,2\pi[,\ z\in\left[0,\frac{a}{2}\right]
\end{aligned}$$

Il vient dès lors successivement

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta} = r(z)\mathbf{e}_\theta, \qquad \frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z} = -\sqrt{3}\,\mathbf{e}_r+\mathbf{e}_z$$

et

$$\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z} = \sqrt{3}\,r(z)\mathbf{e}_z+r(z)\mathbf{e}_r, \qquad \left\|\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial z}\right\| = 2r(z)$$

On a donc

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| d\theta\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a}{2}} 2r(z)\ \ dz = 4\pi \int_0^{\frac{a}{2}} \left(R + \frac{\sqrt{3}}{3} a - \sqrt{3} z \right) dz \\
&= 4\pi \left[\left(R + a\frac{\sqrt{3}}{3} \right) z - \sqrt{3}\,\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}} = 4\pi \left[\left(R + a\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \frac{a}{2} - \sqrt{3}\,\frac{a^2}{8} \right] \\
&= 4\pi \left(\frac{a}{2} R + a^2 \frac{\sqrt{3}}{24} \right) = 2\pi a \left(R + a\frac{\sqrt{3}}{12} \right)
\end{aligned}$$

Remarquons que ce résultat a bien les dimensions d'une aire.

Finalement, l'aire totale de la surface du joint vaut

$$A = 2A_1 + A_3 = 4\pi a \left(R + a\frac{\sqrt{3}}{12} \right) + 2\pi a \left(R - a\frac{\sqrt{3}}{6} \right) = 6\pi a R$$