Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2022

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. La convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ implique-t-elle la convergence absolue de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$? Justifiez.

ii. (a) Énoncez le critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries de fonctions.

(b) Exploitez ce critère pour montrer que, si la série de fonctions positives $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformément sur $\mathtt{I}$, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)/k$ converge également uniformément sur $\mathtt{I}$.

iii. Si $f \in C_0(]a,b[)$, peut-on en déduire que $f \in \mathbb{L}_1(]a,b[)$? Justifiez.

iv. Une des lois de l'électromagnétisme affirme que le flux du champ électrique $\mathbf{E}$ à travers une surface fermée Σ est égal à la charge électrique nette présente dans le volume V délimité par Σ divisée par la permittivité ε_0 du vide. Le paramètre ε_0 est une constante strictement positive.

(a) Exprimez cette loi en utilisant le formalisme du calcul intégral en supposant que $\mathbf{E} \in C_1(\mathbb{R}^3)$, que Σ est régulière et que la distribution des charges électriques est caractérisée par une densité de charge par unité de volume ρ.

(b) Déduisez-en la forme différentielle (sans intégrale) de cette loi sous les hypothèses introduites en (a).

Question II

Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k\, 2^k}$$

i. Pour quelles valeurs de x cette série définit-elle une fonction ?

ii. Étudiez et justifiez la continuité de la fonction f définie par la série.

iii. Montrez, en justifiant, que f vérifie une relation du type

$$x f'(x) - f(x) = \frac{\alpha x^3}{2 + x^2}$$

où α désigne une constante à déterminer. Sur quel intervalle cette relation est-elle vérifiée par f ? Justifiez votre réponse.

Rappel : $\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *si* $|q| < 1$.

Tournez la page.

Question III

i. Étudiez l'existence des intégrales suivantes :

(a)

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{(x-2)^3}}{x^3 \ln^2 x}\, dx$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

ii. On considère l'intégrale

$$I = \iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \qquad \text{où } \mathtt{E} = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 < 2Rx,\ y < x\}$$

dans laquelle R désigne un paramètre strictement positif.

(a) Représentez graphiquement le domaine d'intégration $\mathtt{E}$.

(b) Justifiez l'existence de I et calculez-en la valeur.

Question IV

On appelle *spirale logarithmique* la courbe plane décrite en coordonnées polaires par

$$r = a\,\mathrm{e}^{b\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

où a et b sont deux constantes strictement positives.

i. Calculez la longueur d'un enroulement (de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$) et montrez que les longueurs des enroulements successifs d'amplitude 2π sont en progression géométrique.

ii. Déterminez l'expression en coordonnées polaires de la tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la spirale dans l'orientation correspondant au parcours de la spirale dans le sens trigonométrique.

iii. En utilisant la même orientation de la spirale logarithmique, déterminez l'expression en fonction de θ de l'abscisse curviligne mesurée à partir du point A de coordonnées cartésiennes $(a,0)$.

Question I

i. Quel que soit $k \geq 1$, on a

$$\left|\frac{a_k}{k}\right| = \frac{|a_k|}{k} \leq |a_k|$$

Le terme général de la série des $|a_k/k|$ est donc majoré par le terme général d'une série numérique convergente puisque la série des a_k est absolument convergente.

Par le critère de comparaison, on en déduit la convergence absolue de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$$

ii. (a) Le critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries de fonctions affirme que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformément sur $\mathtt{I}$ si et seulement si, à tout $\varepsilon > 0$, correspond un entier N indépendant de x tel que

$$\left|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right| \leq \varepsilon$$

pour $q \geq p \geq N$ quel que soit $x \in \mathtt{I}$.

(b) La série des $f_k(x)$ positives étant uniformément convergente sur $\mathtt{I}$, elle vérifie le critère de Cauchy énoncé ci-dessus avec

$$\left|\sum_{k=p}^{q} f_k(x)\right| = \sum_{k=p}^{q} f_k(x)$$

Dès lors, on a

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{f_k(x)}{k}\right| = \sum_{k=p}^{q} \frac{f_k(x)}{k} \leq \sum_{k=p}^{q} f_k(x) \leq \varepsilon$$

pour $q \geq p \geq N$ quel que soit $x \in \mathtt{I}$ de sorte que la série donnée converge aussi uniformément sur $\mathtt{I}$.

iii. Non, si $f \in C_0(]a,b[)$, on ne peut pas en déduire que $f \in \mathbb{L}_1(]a,b[)$ comme le montre le contre-exemple de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \in C_0(]0,1[) \quad \text{et} \quad \notin \mathbb{L}_1(]0,1[)$$

iv. (a) La loi de l'électromagnétisme évoquée s'écrit

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV$$

(b) Sous les hypothèses envisagées dans l'énoncé, l'application du théorème de Gauss permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume selon

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV$$

de sorte que, puisque ε_0 est une constante,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$$

Cette égalité étant valable pour un volume V quelconque, on en déduit que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

qui constitue la forme différentielle de la loi considérée.

Question II

i. La série de puissances

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k\,2^k}$$

définit une fonction en tous les points où elle converge.
Appliquant le critère du quotient à la série des modules, il vient

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+3}}{(k+1)\,2^{k+1}} \frac{k\,2^k}{|x|^{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2(k+1)}|x|^2 = \frac{|x|^2}{2}$$

Cette limite étant strictement inférieure à 1 uniquement pour $|x| < \sqrt{2}$, on en déduit que la série converge absolument sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ qui constitue l'intervalle de convergence de la série de puissances. La série diverge sur $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$.

Aux extrémités ($x = \pm\sqrt{2}$), le terme général de la série vaut

$$\frac{(-1)^k(\pm\sqrt{2})^{2k+1}}{k\,2^k} = \frac{\pm(-1)^k\sqrt{2}}{k}$$

Il s'agit de deux séries alternées qui ne convergent pas absolument puisque le module de leur terme général est un multiple de celui de la série harmonique qui diverge. Ces séries alternées sont cependant semi-convergentes puisque $\sqrt{2}/k$ tend monotonément vers zéro.
En conclusion, la série considérée définit une fonction sur l'intervalle fermé $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

ii. La série donnée étant une série de puissances, elle définit une fonction continue sur son intervalle de convergence $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ et aux extrémités de celui-ci auxquelles elle converge. Dès lors, on a $f \in C_0([-\sqrt{2},\sqrt{2}])$.

iii. Toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable sur son intervalle de convergence, la dérivation s'effectuant terme à terme. Ainsi, sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$, nous avons

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)x^{2k}}{k\,2^k}$$

et donc

$$\begin{aligned} x\,f'(x) - f(x) &= x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)x^{2k}}{k\,2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k\,2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)x^{2k+1}}{k\,2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k\,2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \frac{2k+1-1}{k\,2^k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer cette série selon

$$2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}\frac{1}{2^k} = 2x\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k = 2x\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k - 1\right]$$
$$= 2x\left(\frac{1}{1+(x^2/2)} - 1\right) = 2x\left(\frac{1-1-(x^2/2)}{1+(x^2/2)}\right) = -\frac{2x^3}{2+x^2}$$

en utilisant la série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^k = \frac{1}{1-(-x^2/2)} = \frac{1}{1+(x^2/2)}, \quad \text{si} \quad \frac{x^2}{2} < 1$$

On obtient donc

$$xf'(x) - f(x) = -\frac{2x^3}{2+x^2}$$

qui correspond à l'équation différentielle donnée à condition de prendre $\alpha = -2$.
Ce résultat est valable $\forall x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ puisque cette condition permet à la fois la dérivation terme à terme et l'utilisation de la série géométrique.

Question III

i. (a) Soit

$$\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{(x-2)^3}}{x^3\ln^2 x}\,dx$$

- Nous constatons d'abord que

$$\frac{\sqrt{(x-2)^3}}{x^3\ln^2 x} \in C_0([2,+\infty[)$$

  Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $[2,+\infty[$.

- Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{(x-2)^3}}{x^3\ln^2 x} \sim \frac{1}{x^{3/2}\ln^2 x} = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (x\to+\infty)$$

  ce qui assure l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ puisque, dans ce cas, l'intégrande se comporte mieux qu'une fonction intégrable.

En conclusion, l'intégrale existe.

(b) Soit

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$$

- Nous constatons d'abord que,

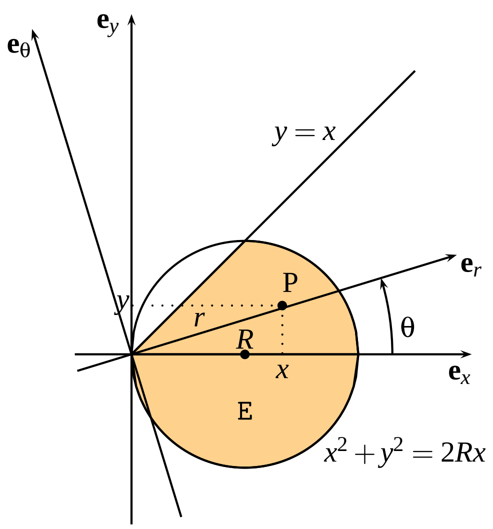
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \in C_0([0,1[)$$

  Cette fonction est donc intégrable sur tout compact inclus dans $[0,1[$.

- Au voisinage de 1, la formule de Taylor permet d'écrire
$$\sqrt{x} \sim 1 + \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]_{x=1}(x-1), \quad (x \to 1^-)$$
soit
$$\sqrt{x} - 1 \sim \frac{1}{2}(x-1), \quad (x \to 1^-)$$
et
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \sim \frac{2}{x-1}, \quad (x \to 1^-)$$
De façon alternative, en multipliant le numérateur et le dénominateur de l'intégrande par le binôme conjugué du dénominateur, on a directement
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \sim \frac{2}{x-1}, \quad (x \to 1^-)$$
L'intégrale n'existe donc pas dans ce cas.

ii. Soit
$$\iint_{\mathtt{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \quad \text{où} \quad \mathtt{E} = \{(x,y) : x^2+y^2 < 2Rx,\ y < x\}$$

(a) Le domaine $\mathtt{E}$ est délimité par le droite $y = x$ et le cercle $x^2+y^2-2Rx = 0$. L'équation du cercle peut aussi s'écrire sous la forme canonique
$$(x-R)^2 + y^2 = R^2$$
ce qui indique qu'il s'agit du cercle de centre $(R,0)$ et de rayon R passant donc par l'origine. Le sens des inégalités montre que le domaine se trouve à l'intérieur du cercle et en dessous de la droite.



(b) Le domaine $\mathtt{E}$ est borné mais ouvert et l'intégrande $1/\sqrt{x^2+y^2}$ n'est pas continu sur le compact $\bar{\mathtt{E}}$ correspondant. L'existence de l'intégrale ne peut donc pas être justifiée à ce stade sur base de la continuité.

La forme du domaine et l'expression de l'intégrande suggèrent d'utiliser les coordonnées polaires pour calculer cette intégrale.
Le changement de variables définissant les coordonnées polaires est régulier sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$ et donc également sur $\mathtt{E}$. L'existence de l'intégrale peut donc être examinée une fois le changement de variables réalisé.

Le changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et polaires est défini par les relations (voir figure) $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ et son Jacobien $J = r$.

En coordonnées polaires, le domaine devient E' et est décrit en faisant varier

- θ de $-\pi/2$ à l'angle repérant la droite $y = x$, soit $\theta = \pi/4$;
- et, pour θ fixé, r de 0 au cercle $x^2 + y^2 = 2Rx$, soit, en coordonnées polaires, $r = 2R\cos\theta$.

L'intégrale à calculer s'écrit alors

$$\iint_{\mathrm{E}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint_{\mathrm{E}'} \frac{|J|}{r}\,d\theta dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} dr$$

et son existence est assurée puisque l'intégrande est continu sur le compact $[-\pi/2, \pi/4] \times [0, 2R\cos\theta]$.

On a

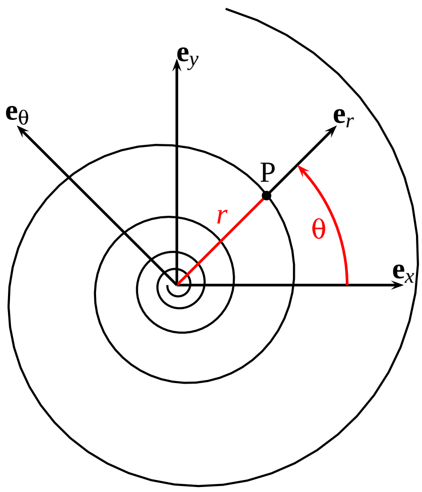
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} 2R\cos\theta\,d\theta = 2R\,[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/4} = 2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

Question IV

La spirale logarithmique a pour équation en coordonnées polaires

$$r = a\,\mathrm{e}^{b\theta}$$

et peut être esquissée de la façon suivante



i. Le vecteur position d'un point P quelconque de la spirale s'écrit, en fonction du paramètre θ,

$$\mathbf{s}(\theta) = r(\theta)\mathbf{e}_r(\theta) = a\,\mathrm{e}^{b\theta}\,\mathbf{e}_r(\theta) \quad \text{où} \quad \theta \in \mathbb{R} \qquad (\spadesuit)$$

La longueur $L_{2\pi}(\theta_0)$ d'un enroulement allant de $\theta = \theta_0$ à $\theta = \theta_0 + 2\pi$ est donc donnée par

$$L_{2\pi}(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \|\mathbf{s}'(\theta)\|\,d\theta$$

où

$$\mathbf{s}'(\theta) = r'(\theta)\mathbf{e}_r + r\mathbf{e}_r'(\theta) = ab\,\mathrm{e}^{b\theta}\,\mathbf{e}_r + a\,\mathrm{e}^{b\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

et donc

$$\|\mathbf{s}'(\theta)\| = a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\theta}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{2\pi}(\theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\theta}\,d\theta \\ &= \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\left[\mathrm{e}^{b\theta}\right]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \\ &= \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\theta_0}\left(\mathrm{e}^{2\pi b}-1\right) \end{aligned}$$

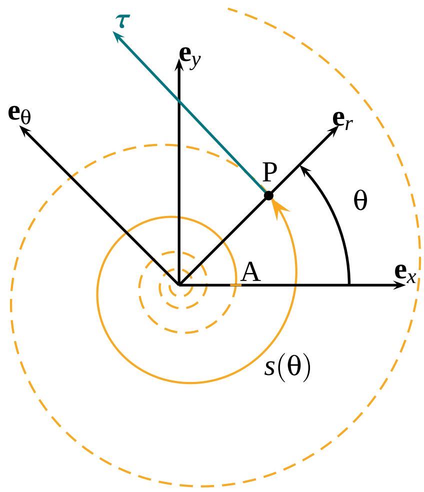
La longueur de l'enroulement suivant se calcule de la même façon :

$$\begin{aligned} L_{2\pi}(\theta_0+2\pi) &= \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b(\theta_0+2\pi)}\left(\mathrm{e}^{2\pi b}-1\right) \\ &= \mathrm{e}^{2\pi b}\left[\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\theta_0}\left(\mathrm{e}^{2\pi b}-1\right)\right] = \mathrm{e}^{2\pi b}L_{2\pi}(\theta_0) \end{aligned}$$

Quand on passe d'un enroulement au suivant, la longueur est multipliée par $\mathrm{e}^{2\pi b}$. Les longueurs des enroulements successifs sont donc en progression géométrique de raison $\mathrm{e}^{2\pi b}$.

ii. La paramétrisation (♠) de la spirale correspond au parcours de celle-ci dans le sens trigonométrique. Dès lors, la tangente recherchée est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{s}'(\theta)}{\|\mathbf{s}'(\theta)\|} = \frac{ab\,\mathrm{e}^{b\theta}\,\mathbf{e}_r + a\,\mathrm{e}^{b\theta}\,\mathbf{e}_\theta}{a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{b\theta}} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\mathbf{e}_r + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\mathbf{e}_\theta$$



iii. Avec la paramétrisation (♠), le point A de coordonnées cartésiennes $(a,0)$ est repéré par $\theta = 0$. Par définition, l'abscisse curviligne d'un point P mesurée par rapport à cette origine est donnée par

$$s(\theta) = \int_0^\theta \|\mathbf{s}'(t)\|dt$$

En valeur absolue, celle-ci est égale à la distance de A à P mesurée le long de la courbe.
En exploitant les développement du point i., on a

$$s(\theta) = \int_0^\theta a\sqrt{1+b^2}\,\mathrm{e}^{bt}\,dt = a\sqrt{1+b^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{bt}}{b}\right]_0^\theta = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}(\mathrm{e}^{b\theta}-1)$$