Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2020

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

En cas de problème technique ou de question,
vous pouvez envoyer un mail à mmm@uliege.be ou téléphoner au 04 366 93 13

Question 1

i. Si la série à termes strictement positifs $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ est convergente, que peut-on dire de la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x_k)x_k}$? Justifiez.

ii. On considère la suite de fonctions définie par $f_k(x) = e^{-x^k}\sqrt{1+x}$.

(a) Déterminez la limite de la suite de fonctions sur $[0,1]$.

(b) Cette suite converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$? Justifiez.

(c) Utilisez le théorème de Lebesgue pour justifier l'égalité

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx$$

(d) Calculez $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx$.

iii. On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par le graphique de la fonction $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}_0^+$.

(a) Déterminez, en fonction de la variable x, le vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ à la courbe $\mathcal{C}$.

(b) Déterminez l'expression intégrale de l'abscisse curviligne s mesurée à partir du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $x = 2$. L'intégrale ne doit pas être évaluée.

iv. Soit V un domaine compact régulier de $\mathbb{R}^3$, Σ la frontière fermée régulière de celui-ci, $\mathbf{n}$ la normale extérieure à V et φ un champ scalaire continûment dérivable sur V. En appliquant le théorème de Gauss au champ vectoriel $\varphi\,\mathbf{e}$ où $\mathbf{e}$ est un vecteur constant, démontrez que

$$\iiint_V \nabla\varphi\, dV = \iint_\Sigma \varphi\,\mathbf{n}\, d\sigma$$

Rappel : $\nabla\cdot(\psi\mathbf{f}) = \mathbf{f}\cdot\nabla\psi + \psi(\nabla\cdot\mathbf{f})$

Question 2

Recherchez une solution en série de puissances de x du problème différentiel

$$\begin{cases} (1+3x)y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Sur quel intervalle cette solution en série de puissances représente-t-elle la solution unique du problème différentiel ? Justifiez.

Question 3

Étudiez l'existence des intégrales suivantes, en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$. Les valeurs des intégrales ne sont pas demandées.

i. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x-2)^3}\, dx$

ii. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^{2/3} \ln^2 x} dx$

iii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3\, e^{\beta x}}{1+x} dx$

iv. $\displaystyle\iint_{\mathtt{E}} x\ e^{-x/y}\, dxdy$ où $\mathtt{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y > x^2, xy < 1\right\}$

Question 4

On considère le cône $x^2 + y^2 = z^2$ et le cylindre $x^2 + y^2 = 2\ell y$ (où $\ell > 0$).

i. Esquissez le cône et le cylindre dans le premier octant (x, y, $z \geq 0$).

ii. Calculez le volume du domaine situé à l'intérieur du cylindre et à l'extérieur du cône dans le premier octant (x, y, $z \geq 0$).

iii. Déterminez l'aire de la portion du cône située à l'intérieur du cylindre dans le premier octant (x, y, $z \geq 0$).

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ est convergente, alors son terme général x_k tend vers zéro, *i.e.*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = 0^+$$

On a alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(1-x_k)x_k} = +\infty$$

On en déduit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x_k)x_k}$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers zéro.

ii. Soit la suite des fonctions $f_k(x) = \mathrm{e}^{-x^k}\sqrt{1+x}$.

(a) Sachant que

$$\lim_{k\to+\infty} x^k = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

on détermine la limite de la suite sous la forme

$$f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} & \text{si } x \in [0,1[\\ \sqrt{2}/\mathrm{e} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

(b) La convergence de la suite n'est pas uniforme sur $[0,1]$. Si c'était le cas, la limite f des f_k serait continue comme limite uniforme de fonctions continues. Or f est discontinue en $x=1$ vu le point précédent.

(c) Les hypothèses du théorème de Lebesgue sont satisfaites puisque

- $f_k \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ vu que $f_k \in C_0([0,1])$;
- la suite des f_k converge presque partout sur $[0,1]$ vers la fonction $\sqrt{1+x}$;
- $|f_k(x)| \leq \sqrt{1+x} \in \mathbb{L}_1(]0,1[)$ presque partout sur $[0,1]$ et pour tout k.

Ceci justifie le passage de la limite sous le signe d'intégration, *i.e.*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\ dx = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} f_k(x) dx$$

(d) Exploitant le résultat ci-dessus et tenant compte du fait que la valeur de l'intégrande en $x=1$ n'affecte pas la valeur de l'intégrale, on calcule aisément

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\ dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$$

iii. La courbe définie par le graphique de $f(x) = 1/x$ admet la paramétrisation

$$\mathbf{s}(x) = x\,\mathbf{e}_x + \frac{1}{x}\,\mathbf{e}_y\ , \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

(a) La tangente à la courbe est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{s}'(x)}{\|\mathbf{s}'(x)\|} = \frac{\mathbf{e}_x - \dfrac{1}{x^2}\mathbf{e}_y}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}$$

(b) L'abscisse curviligne mesurée à partir du point repéré par

$$\mathbf{s}(2) = 2\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y$$

est donnée par

$$s(x) = \int_2^x \|\mathbf{s}'(t)\|\, dt = \int_2^x \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\, dt$$

iv. Sur le compact régulier V de frontière Σ, le théorème de Gauss s'écrit

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à V.

Appliquant ce théorème au champ vectoriel $\varphi\mathbf{e}$ où $\mathbf{e}$ est un vecteur constant, on a

$$\iiint_V \nabla\cdot(\varphi\mathbf{e})\, dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma \varphi\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

La formule donnée dans l'énoncé permet d'écrire

$$\nabla\cdot(\varphi\mathbf{e}) = \mathbf{e}\cdot\nabla\varphi + \varphi(\nabla\cdot\mathbf{e}) = \mathbf{e}\cdot\nabla\varphi$$

puisque $\mathbf{e}$ est un vecteur constant. On a donc

$$\iiint_V \mathbf{e}\cdot\nabla\varphi\, dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma \varphi\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

ou encore, puisque $\mathbf{e}$ est un vecteur constant qui peut être sorti des intégrales,

$$\mathbf{e}\cdot\left(\iiint_V \nabla\varphi\, dx\,dy\,dz\right) = \mathbf{e}\cdot\left(\iint_\Sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma\right)$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le vecteur $\mathbf{e}$ considéré, on en déduit que

$$\iiint_V \nabla\varphi\, dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma \varphi\mathbf{n}\, d\sigma$$

Question 2

Recherchons une solution de l'équation

$$(1+3x)y'' + 3y' = 0$$

sous la forme d'une série de puissances de x, soit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

où les coefficients a_k sont à déterminer.
Toute série de puissances étant indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence $\mathtt{I}$, on calcule successivement

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$$
$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2}$$

Injectant ces expressions dans l'équation différentielle, il vient

$$(1+3x)\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2} + 3\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} = 0$$

soit

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} 3k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k\, a_k\, x^{k-1} = 0$$

Afin de regrouper les différents termes, on modifie la première somme par la substitution $k \to k+1$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\,k\, a_{k+1}\, x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} 3k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k\, a_k\, x^{k-1} = 0$$

L'indice initial de la deuxième somme peut être modifié en remarquant que le terme correspondant à $k=1$ est nul. On obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\,k\, a_{k+1}\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k\,(k-1)\, a_k\, x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3k\, a_k\, x^{k-1} = 0$$

soit, après regroupement et simplification,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big[(k+1)\, a_{k+1} + 3k\, a_k\Big] k\, x^{k-1} = 0$$

Cette équation devant être vérifiée en tout point x de l'intervalle de convergence, on en déduit que les coefficients a_k vérifient la relation de récurrence

$$a_{k+1} = \frac{-3k}{k+1}\, a_k \qquad \forall k \geq 1 \tag{†}$$

On obtient successivement

$$a_2 = \frac{-3}{2}\, a_1, \quad a_3 = \frac{-3\cdot 2}{3}\, a_2 = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}\,(-3)^2\, a_1$$

et plus généralement,

$$a_k = \frac{1\cdot 2\cdots(k-1)}{2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k}\,(-3)^{k-1}\cdot a_1 = \frac{(-3)^{k-1}}{k}\, a_1 \quad \forall k \geq 2$$

L'application des conditions initiales conduit à

$$y(0) = a_0 = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = a_1 = -1$$

Dès lors, on obtient

$$a_k = \frac{(-1)^k\, 3^{k-1}}{k} \quad \forall k \geq 2$$

et

$$y(x) = 1 - x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3^{k-1}}{k}\, x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3^{k-1}}{k}\, x^k \tag{‡}$$

L'intervalle de convergence de la série de puissances peut être déterminé par l'application du critère du quotient à la série des modules, ce qui, en utilisant (†) ou (‡), conduit à la condition

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = 3\,|x| \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 3\,|x| < 1$$

L'intervalle de convergence de la série est donc $\mathtt{I} = \left]-1/3, 1/3\right[$ et la série diverge sur $\left]-\infty, -1/3\right[\cup \left]1/3, +\infty\right[$.

Les opérations précédentes, en particulier la dérivation terme à terme, sont licites sur $\mathtt{I}$ de sorte que (‡) constitue la solution du problème différentiel sur $\left]-1/3, 1/3\right[$.

La solution sous la forme (‡) n'est pas valable en $x = -1/3$ puisque la série prend alors la forme

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3^{k-1}}{k} \left(\frac{-1}{3}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$$

qui est divergente (multiple de la série harmonique).

En $x = 1/3$, par contre, la série s'écrit

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 3^{k-1}}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k}$$

et est convergente comme série alternée dont le module du terme général décroit mononotément vers zéro (multiple de la série harmonique alternée).

Le problème différentiel possède une solution unique deux fois continûment dérivable sur $\left]-1/3, +\infty\right[$ puisque les coefficients de l'équation différentielle écrite sous la forme canonique

$$y'' + \frac{3}{1+3x} y' = 0$$

sont continus sur cet intervalle et que les conditions de Cauchy sont imposées en $x = 0$. On en déduit que la série de puissances s'identifie à la solution unique du problème différentiel en $x = 1/3$ (même si on peut montrer que la série de puissances n'est pas dérivable terme à terme en $x = 1/3$) puisque toute série de puissances est continue aux extrémités de son intervalle de convergence où elle converge et que la solution du problème différentiel est également continue en $x = 1/3$.

En conclusion, la solution en série de puissances déterminée représente la solution unique du problème différentiel sur $\left]-1/3, 1/3\right]$.

Question 3

i. Soit

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^3}$$

L'intégrale n'existe pas car la fonction $(x-2)^{-3}$ n'est pas intégrable au voisinage de $x = 2$.

ii. Soit

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^{2/3}\, \ln^2 x}\, dx$$

L'intégrand est continu sur $[1/2, 1[$. Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de 1 où

$$\begin{cases} \ln x \sim \ln 1 + \left.\dfrac{1}{x}\right|_{x=1} (x-1) = (x-1) \\ \dfrac{1}{x^{2/3}} \sim 1 \end{cases} \qquad (x \to 1)$$

en utilisant la formule de Taylor pour déterminer le comportement asymptotique de la fonction ln. Dès lors, on a

$$f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^2}, \quad (x \to 1)$$

de sorte que l'intégrale n'existe pas.

iii. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3\, \mathrm{e}^{\beta x}}{1+x}\, dx$$

La fonction

$$f(x) = \frac{x^3\, \mathrm{e}^{\beta x}}{1+x}$$

est continue sur $[0,+\infty[$ pour toutes les valeurs réelles du paramètre β. Elle est donc intégrable sur tout compact inclus dans $[0,+\infty[$. Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

- Pour $\beta \geq 0$, f ne tend pas vers zéro en $+\infty$ et

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{x^3\, \mathrm{e}^{\beta x}}{1+x}\right), \qquad (x \to +\infty)$$

  Dès lors, l'intégrale n'existe pas.
- Pour $\beta < 0$, on a par contre

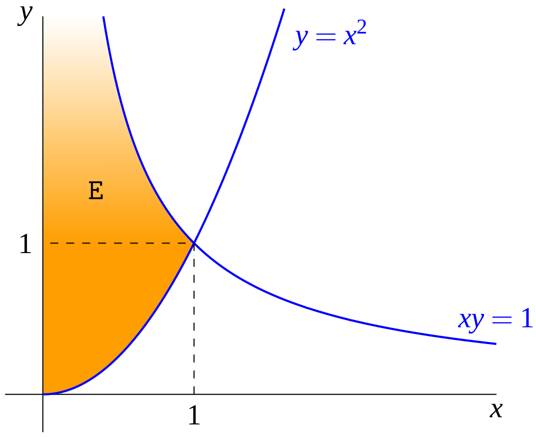
$$\mathrm{e}^{\beta x} = o\left(\frac{1}{x^4}\right), \qquad (x \to +\infty)$$

  et donc

$$\frac{x^3\, \mathrm{e}^{\beta x}}{1+x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad (x \to +\infty)$$

  ce qui justifie l'existence de l'intégrale.

iv. L'ensemble $\mathtt{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y > x^2, xy < 1\right\}$ peut être représenté de la façon suivante :



Cet ensemble étant non borné, l'existence de l'intégrale double sera établie par application du critère de Tonelli. Comme la fonction $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-y/x}$ est de signe positif sur $\mathtt{E}$, on a $f = |f|$ de sorte qu'il suffit de trouver un ordre d'intégration partielle de f qui a un sens pour justifier l'intégrabilité.

Considérons l'ordre d'intégration

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{1/x} x\,\mathrm{e}^{-y/x}\, dy$$

- La fonction $g(y) = x\,\mathrm{e}^{-y/x}$ est continue (par rapport à y) sur $[x^2, 1/x]$ pour presque tout $x \in [0,1]$ et est donc intégrable sur $[x^2, 1/x]$. On calcule aisément

$$\begin{aligned} G(x) = \int_{x^2}^{1/x} x\,\mathrm{e}^{-y/x}\,dy &= -x^2\left[\mathrm{e}^{-y/x}\right]_{x^2}^{1/x} \\ &= -x^2\left(\mathrm{e}^{-1/x^2} - \mathrm{e}^{-x}\right) \end{aligned}$$

- La fonction G étant continue sur $]0,1]$, son intégrabilité sur $]0,1[$ dépend de son comportement au voisinage de $x = 0$. Or, on a

$$\lim_{x\to 0}\left[-x^2\left(\mathrm{e}^{-1/x^2} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right] = 0 \qquad \text{soit} \qquad G(x) = o(1), \quad (x \to 0)$$

  Dès lors, G est intégrable sur $]0,1[$.

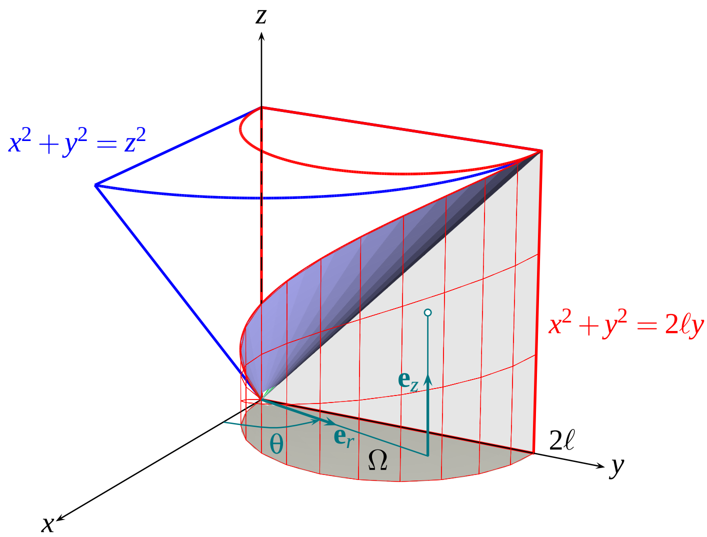
Par le critère de Tonelli, on en déduit que l'intégrale double existe.

Question 4

i. Le cône $x^2 + y^2 = z^2$ est un cône circulaire droit d'axe OZ. L'équation du cylindre $x^2 + y^2 = 2\ell y$ peut encore s'écrire, sous forme canonique,

$$x^2 + (y-\ell)^2 = \ell^2$$

Il s'agit d'un cylindre circulaire droit de rayon ℓ dont l'axe de symétrie de révolution est parallèle à OZ et passe par le point $(0, \ell, 0)$. Dans le premier octant, on a donc



ii. Le volume recherché s'exprime par

$$V = \iiint_{\mathrm{E}} dx\,dy\,dz$$

où le domaine E est situé dans le premier octant à l'extérieur du cône et à l'intérieur du cylindre.

Compte tenu de sa géométrie, le domaine est aisément décrit en coordonnées cylindriques, les équations du cône et du cylindre s'écrivant

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = z^2 \quad &\to \quad r = z \\ x^2 + y^2 = 2\ell y \quad &\to \quad r = 2\ell \sin\theta \end{aligned}$$

En décrivant la base du cylindre et en montant jusqu'au cône,

- θ varie de 0 à $\pi/2$;
- pour θ fixé, r varie de 0 au cylindre $r = 2\ell \sin\theta$;
- et, pour r et θ fixés, z varie de 0 au cône $z = r$.

On a alors, en tenant compte du Jacobien de la transformation,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\ell\sin\theta} r\,dr \int_0^r dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\ell\sin\theta} r^2\,dr \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\ell\sin\theta} d\theta = \frac{8\ell^3}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{8\ell^3}{3}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right)\,d\theta = \frac{8\ell^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta\right)\,d\theta \\
&= \frac{8\ell^3}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{16\ell^3}{9}
\end{aligned}$$

iii. La portion Σ du cône considérée est décrite, en adoptant une paramétrisation basée sur les coordonnées cylindriques, par

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + z(r)\mathbf{e}_z = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + r\,\mathbf{e}_z$$

où le domaine de variation Ω des paramètres est décrit par

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad r \in [0,\, 2\ell\sin\theta]$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} &= \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \\
\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= r\,\mathbf{e}_\theta \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta) + r(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\theta) = r\mathbf{e}_z - r\mathbf{e}_r$$

de sorte que

$$\left\|\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{2}r$$

Dès lors, l'aire de la surface Σ est donnée par

$$\begin{aligned}
\iint_\Sigma d\sigma &= \iint_\Omega \left\|\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta}\right\| dr\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\ell\sin\theta} r\,dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\ell\sin\theta} d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\ell^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= 2\sqrt{2}\ell^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \sqrt{2}\ell^2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ell^2
\end{aligned}$$