LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2018

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Montrez que si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ est convergente.

ii. Définissez le concept de convergence uniforme d'une suite de fonctions.

iii. Énoncez le théorème de la convergence dominée (théorème de Lebesgue).

iv. Montrez que si $f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$ et $g \in C_0([0,+\infty[)$ avec $g = O(1)$ au voisinage de $+\infty$ alors $fg \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

v. Soit $\mathtt{K} \subset \mathbb{R}^3$ un compact régulier de normale extérieure $\mathbf{n}$ et dont la frontière ∂K est régulière par morceaux. Montrez, en justifiant, que si f et $g \in C_2(\mathtt{K})$, alors

$$\iint_{\partial \mathtt{K}} f\, \nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathtt{K}} (f\, \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dxdydz$$

Question II

Soit la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{2^k\, k^2}$$

i. Déterminez le plus grand ensemble $\mathtt{E}$ sur lequel la série définit une fonction f.

ii. Étudiez la convergence uniforme de la série.

iii. Montrez que f vérifie une relation du type

$$(x-1)f''(x) + f'(x) = \frac{1}{\alpha - x}$$

où α désigne une constante à déterminer. Quel est le plus grand ouvert $\mathtt{I}$ sur lequel cette relation est valable ? Justifiez.

Tournez la page.

Question III

Calculez en justifiant

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{y\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2}\, dy$$

Question IV

On considère le champ vectoriel

$$\mathbf{F} = \alpha(\mathrm{e}^{y/\ell}\, \mathbf{e}_x + \mathrm{e}^{x/\ell}\, \mathbf{e}_z)$$

(où α et ℓ sont deux constantes strictement positives), la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2\ell,\ 0 \leq y \leq \ell, z = x^2/\ell\right\}$$

et l'intégrale

$$I = \iint_\Sigma (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale à Σ telle que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z > 0$.

i. Esquissez graphiquement Σ.
ii. Introduisez une paramétrisation appropriée de Σ et calculez I.
iii. Vérifiez le résultat obtenu en ii en calculant I par application du théorème de Stokes.

SOLUTION

Question I

i. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument, alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge également absolument puisque $|(-1)^k a_k| = |a_k|$.

Toute série absolument convergente étant également convergente, on en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.

ii. La suite des fonctions f_k converge uniformement vers une fonction f sur $\mathtt{I}$, ce qui se note $f_k \overset{\mathtt{I}}{\Longrightarrow} f$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall n \geq N) : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

iii. Le théorème de Lebesgue (convergence dominée) s'énonce comme suit.
Si

$$f_k \in \mathbb{L}_1 \quad \xrightarrow{p.p.} \quad f$$

et s'il existe une fonction intégrable F telle que

$$|f_k| \leq F \quad \text{p.p.}$$

alors

- Critère d'intégrabilité : $f \in \mathbb{L}_1$
- Critère de passage à la limite sous le signe d'intégration :

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(\mathrm{x}) d\mathrm{x} = \int f(\mathrm{x}) d\mathrm{x}$$

iv. Si $g = O(1)$ au voisinage de $+\infty$, il existe une constante C_1 et un réel M tels que

$$|g(x)| \leq C_1 \qquad \forall x > M$$

Par ailleurs, puisque $g \in C_0([0,M])$, la fonction g est bornée sur $[0,M]$, *i.e.* il existe une constante C_2 telle que

$$|g(x)| \leq C_2 \qquad \forall x \in [0,M]$$

En regroupant les deux résultats, on a

$$|g(x)| \leq C = \max\{C_1,\, C_2\} \qquad \forall x \in [0,+\infty[$$

Si $f \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[$, on sait que $|f| \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[$ et

$$|fg| \leq C|f| \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$$

Par le critère de Lebesgue, on déduit que $fg \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$.

v. Si $\mathtt{K} \subset \mathbb{R}^3$ désigne un compact régulier dont la frontière ∂K est régulière par morceaux et si f et $g \in C_2(\mathtt{K})$, on sait, par le théorème de Gauss que

$$\iint_{\partial \mathtt{K}} f\, \nabla g \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathtt{K}} \nabla \cdot (f \nabla g) dxdydy$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(f\nabla g) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}+f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\\ &= \nabla f\cdot\nabla g+f\nabla^2 g\end{aligned}$$

puisque

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z,\qquad \nabla g=\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla^2 g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

Dès lors

$$\iint_{\partial\mathtt{K}} f\,\nabla g\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\iiint_{\mathtt{K}}(f\,\nabla^2 g+\nabla f\cdot\nabla g)dxdydz$$

Question II

i. L'expression donnée définit une fonction f en chacun des points où la série

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{2^k\,k^2}$$

converge.

L'application du critère du quotient à la série des modules conduit à considérer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x-1|^{k+1}}{2^{k+1}\,(k+1)^2}\frac{2^k\,k^2}{|x-1|^k}=\left(\frac{|x-1|}{2}\right)^-$$

- La série converge (absolument) si $|x-1|/2<1$, c'est-à-dire si $x\in\,]-1,3[$.
- La série diverge si $|x-1|/2>1$, c'est-à-dire si $x\in\,]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$.
- Le critère du quotient ne permet pas de conclure si $|x-1|/2=1$, c'est-à-dire si $x=-1$ ou $x=3$. Il faut donc étudier séparément la convergence des deux séries numériques correspondant à ces deux valeurs. Celles-ci s'écrivent respectivement

  $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

  Elles convergent (absolument) puisque le module de leur terme général est celui d'une série de Riemann convergente.

En conclusion, la série converge et définit une fonction sur $\mathtt{E}=[-1,3]$.

ii. En tant que série de puissances, la série converge uniformément sur tout intervalle fermé borné inclus dans son intervalle de convergence qui est ici l'ouvert $\mathtt{I}=\,]-1,3[$.

De plus, toute série de puissances convergeant en une extrémité $\tilde{x}$ de son intervalle de convergence I converge également uniformément sur tout intervalle fermé borné $[\alpha,\beta]\subset(I\cup\{\tilde{x}\})$. Par conséquent, la convergence de la série étudiée est également uniforme sur tout intervalle fermé borné inclus dans $\mathtt{E}=[-1,3]$.

iii. Toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence $\mathtt{I}$. Ainsi, sur $\mathtt{I} =]-1,3[$, nous avons

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-1)^{k-1}}{2^k\, k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{2^k\, k}$$

et

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(x-1)^{k-2}}{2^k\, k}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
(x-1)f''(x) + f'(x) &= (x-1)\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(x-1)^{k-2}}{2^k\, k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{2^k\, k} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(x-1)^{k-1}}{2^k\, k} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{2^k\, k} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{2^k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{k-1}}{2^k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{k}}{2^k}
\end{aligned}$$

où la dernière expression est obtenue en changeant d'indice de sommation.
Le résultat s'avère être une série géométrique convergente sur $\mathtt{I}$ puisque

$$\left|\frac{x-1}{2}\right| < 1 \quad \forall x \in \mathtt{I} =]-1,3[$$

Exploitant le résultat sur la somme d'une telle série, il vient

$$(x-1)f''(x) + f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{2}{3-x} = \frac{1}{3-x}$$

qui correspond à l'équation différentielle annoncée avec $\alpha = 3$.

Les développement ci-dessus sont valables sur l'intervalle de convergence $\mathtt{I} =]-1,3[$ de la série, lequel constitue le plus grand ouvert sur lequel la série donnée constitue la solution de l'équation différentielle proposée.

Question III

L'expression

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{y\,\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2}\, dy$$

ne peut être calculée telle quelle. Elle est cependant équivalente à

$$I = \iint_{\mathtt{E}} \frac{y\,\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2}\, dxdy$$

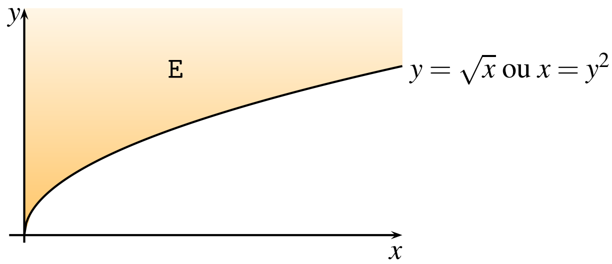
où (voir figure)

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y) : x \in]0,+\infty[\text{ et } \sqrt{x} < y < +\infty\right\}$$

si cette intégrale double existe. Comme le domaine est non borné, ce sera le cas si on trouve un ordre d'intégration partielle de

$$\left|\frac{y\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2}\right| = \frac{y\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2} \quad \text{sur} \quad \mathtt{E}$$

qui peut être justifié (Critère de Tonelli).



Renversons l'ordre d'intégration proposé puisque celui-ci ne mène à rien. Nous décrivons alors le domaine en faisant varier

- y de 0 à $+\infty$
- et, pour y fixé, x de 0 à y^2,

ce qui conduit à

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{y^2} \frac{y\mathrm{e}^{-y^2}}{x+y^2} dx = \int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y^2}\, dy \int_0^{y^2} \frac{1}{x+y^2} dx$$

- Pour (presque) tout y dans $]0,+\infty[$, $1/(x+y^2)$ est intégrable par rapport à x sur $]0,y^2[$ puisque

  $$\frac{1}{x+y^2} \in C_0([0,y^2])$$

  On calcule aisément

  $$\int_0^{y^2} \frac{1}{x+y^2} dx = \left[\ln(x+y^2)\right]_0^{y^2} = \ln(2y^2) - \ln(y^2) = \ln\frac{2y^2}{y^2} = \ln 2$$

- Il faut ensuite examiner si

  $$y\mathrm{e}^{-y^2} \in \mathbb{L}_1(]0,+\infty[)$$

  ce qui est bien le cas puisque, d'une part, $y\mathrm{e}^{-y^2} \in C_0([0,+\infty[)$ et que, d'autre part,

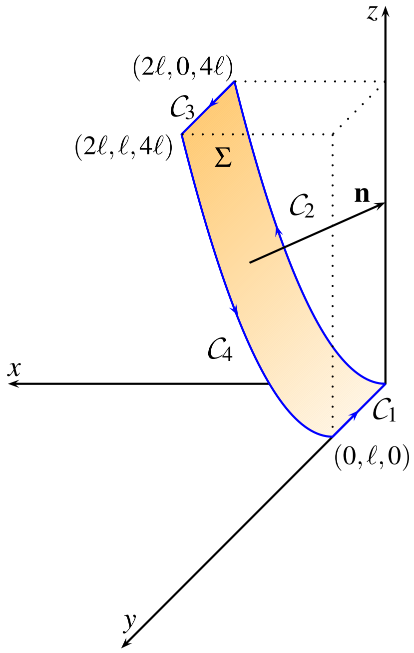
  $$y\mathrm{e}^{-y^2} = o\left(\frac{1}{y^2}\right), \quad (y \to +\infty)$$

L'intégrale existe donc bien et se calcule selon

$$I = \ln 2 \int_0^{\infty} y\mathrm{e}^{-y^2}\, dy = \ln 2 \left[\frac{-\mathrm{e}^{-y^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = -\frac{\ln 2}{2}\left(\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} - 1\right) = \frac{\ln 2}{2}$$

Question IV

i. Le domaine peut être esquissé comme suit.



ii. Afin de calculer

$$I = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

nous exprimons le vecteur position des points de la surface Σ en fonction des paramètres x et y suivant

$$\mathbf{s}(x,y) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + \frac{x^2}{\ell}\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad x \in [0,2\ell] \text{ et } y \in [0,\ell]$$

On calcule ensuite successivement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} = \mathbf{e}_x + \dfrac{2x}{\ell}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = \mathbf{e}_y \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} = \mathbf{e}_z - \frac{2x}{\ell}\mathbf{e}_x$$

ce qui correspond à $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z > 0$.
L'intégrale à calculer s'exprime donc sous la forme

$$I = \int_0^{2\ell} dx \int_0^{\ell} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot (\mathbf{e}_z - \frac{2x}{\ell}\mathbf{e}_x)\, dy$$

On a

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \alpha e^{y/\ell} & 0 & \alpha e^{x/\ell} \end{vmatrix} = -\left(\frac{\alpha}{\ell} e^{x/\ell}\right)\mathbf{e}_y - \left(\frac{\alpha}{\ell} e^{y/\ell}\right)\mathbf{e}_z$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\ell} dx \int_0^{\ell} \left(-\frac{\alpha}{\ell}\,\mathrm{e}^{y/\ell}\right) dy \\
&= -\alpha \int_0^{2\ell} \left[\mathrm{e}^{y/\ell}\right]_0^{\ell} dx \\
&= -\alpha \int_0^{2\ell} (\mathrm{e}-1)\, dx \\
&= -2\ell\alpha(\mathrm{e}-1)
\end{aligned}
$$

iii. Le théorème de Stokes permet d'exprimer I sous la forme

$$
I = \iint_{\Sigma} (\nabla \wedge \mathbf{F}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}
$$

où $\partial\Sigma$ désigne le contour de la surface Σ orienté dans le sens compatible avec la règle de la main droite appliquée à la normale $\mathbf{n}$.

Le contour $\partial\Sigma$ est constitué de 4 parties $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ (voir figure) de sorte que

$$
\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}
$$

- Sur les parties $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ du contour, $d\mathbf{s}$ est orienté selon $\mathbf{e}_y$ alors que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_y = 0$. Dès lors

$$
\oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0
$$

- L'arc $\mathcal{C}_2$ est décrit par

$$
\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_x + \frac{x^2}{\ell}\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad x \in]0, 2\ell[
$$

  de sorte que

$$
\mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] = \alpha(\mathbf{e}_x + \mathrm{e}^{x/\ell}\,\mathbf{e}_z), \qquad \mathbf{s}'(x) = \mathbf{e}_x + \frac{2x}{\ell}\mathbf{e}_z
$$

  et

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\ell} \mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] \cdot \mathbf{s}'(x)\, dx \\
&= \alpha \int_0^{2\ell} \left(1 + \frac{2x}{\ell}\,\mathrm{e}^{x/\ell}\right) dx
\end{aligned}
$$

- Sur $\mathcal{C}_4$, on procède de la même façon en introduisant la paramétrisation

$$
\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_x + \ell\mathbf{e}_y + \frac{x^2}{\ell}\mathbf{e}_z
$$

  de sorte que

$$
\mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] = \alpha(\mathrm{e}\,\mathbf{e}_x + \mathrm{e}^{x/\ell}\,\mathbf{e}_z) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{s}'(x) = \mathbf{e}_x + \frac{2x}{\ell}\mathbf{e}_z
$$

  Compte tenu de l'orientation de $\mathcal{C}_4$, le paramètre x varie cette fois de 2ℓ à 0. Dès lors

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{2\ell}^{0} \mathbf{F}[\mathbf{s}(x)] \cdot \mathbf{s}'(x)\, dx \\
&= \alpha \int_{2\ell}^{0} \left(\mathrm{e} + \frac{2x}{\ell}\,\mathrm{e}^{x/\ell}\right) dx = -\alpha \int_0^{2\ell} \left(\mathrm{e} + \frac{2x}{\ell}\,\mathrm{e}^{x/\ell}\right) dx
\end{aligned}
$$

Au total, on a donc

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \oint_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \oint_{C_4} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \\
&= \alpha \int_0^{2\ell} \left(1 + \frac{2x}{\ell}\,\mathrm{e}^{x/\ell}\right) dx - \alpha \int_0^{2\ell} \left(\mathrm{e} + \frac{2x}{\ell}\,\mathrm{e}^{x/\ell}\right) dx \\
&= \alpha \int_0^{2\ell} (1-\mathrm{e})dx = -2\ell\alpha(\mathrm{e}-1)
\end{aligned}
$$

ce qui vérifie le résultat obtenu au point ii.