Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2019

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez le concept de convergence uniforme d'une suite de fonctions sur un intervalle $\mathtt{I}$.

ii. On considère la spirale logarithmique dont l'équation en coordonnées polaires est $r = ab^{\theta}$ où a et b sont des constantes strictement positives (avec $b \neq 1$) et où $\theta \in]0,+\infty[$.
Déterminez l'expression de la tangente $\boldsymbol{\tau}$ en un point P de la spirale logarithmique ainsi que la mesure de l'angle entre **OP** (où O désigne l'origine du repère) et $\boldsymbol{\tau}$.

iii. Si f et g sont intégrables au sens de Lebesgue sur $]1,+\infty[$, peut-on en conclure que $fg \in \mathbb{L}_1(]1,+\infty[)$? Justifiez.

iv. Montrez que, pour tout $\mathbf{e}$ constant et non nul,

$$\oint_{\mathcal{C}} \Phi\, \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \iint_{\Sigma} \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}$$

où Σ désigne une surface régulière s'appuyant sur la courbe fermée $\mathcal{C}$ et telle que les orientations de la surface Σ et de la courbe $\mathcal{C}$ sont compatibles avec la règle de la main droite. Précisez des conditions suffisantes sur le champ scalaire Φ pour qu'il en soit ainsi.
Déduisez-en que

$$\oint_{\mathcal{C}} \Phi\, d\mathbf{s} = -\iint_{\Sigma} \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}$$

On rappelle que, pour tout champ scalaire ψ et tout champ vectoriel $\mathbf{f}$ suffisamment dérivables,

$$\nabla \wedge (\psi\, \mathbf{f}) = \nabla\psi \wedge \mathbf{f} + \psi\, \nabla \wedge \mathbf{f}$$

Question II

On pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-1)^{2k+1}}{2k+1}$$

i. Déterminez le domaine de définition $\mathtt{E}$ de f.

ii. Précisez la continuité et la dérivabilité de cette fonction f. Justifiez.

iii. Sur base de l'expression de f', déterminez une expression de f en termes de fonctions connues. Sur quel intervalle l'expression obtenue représente-t-elle f ? Justifiez.

Tournez la page.

Question III

Calculez, en justifiant,

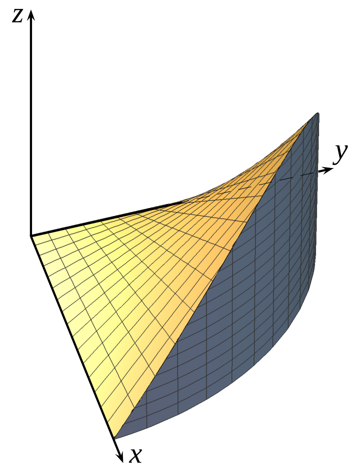
$$I = \int_0^{+\infty} dy \int_{1/y}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x^2 y}\, dx$$

Question IV

On considère le domaine

$$\mathtt{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,\ y,\ z \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2,\ bz \leq xy\}$$

(où a et b désignent des paramètres strictement positifs) esquissé ci-contre en utilisant un logiciel mathématique.



i. Calculez le volume de $\mathtt{E}$.

ii. Calculez l'aire de la surface

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,\ y,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq a^2,\ bz = xy\}$$

limitant supérieurement $\mathtt{E}$.

SOLUTION

Question I

i. La suite des fonctions f_k converge uniformément vers f sur $\mathtt{I}$, ce qui se note $f_k \overset{\mathtt{I}}{\Longrightarrow} f$ lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall x \in \mathtt{I}, \forall k \geq N) : |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ou, de façon équivalente, lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall k \geq N) : \sup_{x \in \mathtt{I}} |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

ii. La courbe admet la paramétrisation

$$\mathbf{s}(\theta) = r(\theta)\mathbf{e}_r = ab^{\theta}\mathbf{e}_r, \quad \theta \in]0, +\infty[$$

La tangente à la courbe est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{s}'(\theta)}{\|\mathbf{s}'(\theta)\|}$$

où

$$\mathbf{s}'(\theta) = a \ln b\, b^{\theta}\mathbf{e}_r + a\, b^{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$$

et

$$\|\mathbf{s}'(\theta)\| = a\, b^{\theta}\sqrt{1 + \ln^2 b}$$

de sorte que

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln b\, \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_{\theta}}{\sqrt{1 + \ln^2 b}}$$

Puisque $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unitaire porté par **OP**, l'angle α recherché vérifie

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_r = \cos\alpha = \frac{\ln b}{\sqrt{1 + \ln^2 b}}$$

soit

$$\alpha = \arccos \frac{\ln b}{\sqrt{1 + \ln^2 b}}$$

iii. NON. Considérons par exemple les fonctions

$$g(x) = f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$$

Ces fonctions sont intégrables sur $]1, +\infty[$ puisque

- $f \in C_0(]1, +\infty[)$;
- au voisinage de 1,

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \qquad (x \to 1^+)$$

  de sorte que f est intégrable au voisinage de $x = 1$;
- au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}, \qquad (x \to +\infty)$$

  de sorte que f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Par contre,
$$f(x)g(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$$
n'est pas intégrable au voisinage de $x = 1$ puisque
$$\frac{1}{x^2(x-1)} \sim \frac{1}{x-1}, \quad (x \to 1)$$

iv. L'application du théorème de Stokes au champ vectoriel $\Phi\mathbf{e}$, où Φ est continûment dérivable, conduit à
$$\oint_C \Phi\,\mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = \iint_\Sigma [\nabla \wedge (\Phi\,\mathbf{e})] \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$
où Σ désigne une surface régulière s'appuyant sur la courbe fermée $\mathcal{C}$ et telle que les orientations de la surface Σ et de la courbe $\mathcal{C}$ sont compatibles avec la règle de la main droite.

Par application de la formule donnée dans l'énoncé, on peut calculer
$$\nabla \wedge (\Phi\,\mathbf{e}) = \nabla\Phi \wedge \mathbf{e} + \Phi\,\nabla \wedge \mathbf{e} = \nabla\Phi \wedge \mathbf{e}$$
puisque $\mathbf{e}$ est constant. Dès lors, en tenant compte des propriétés du produit scalaire, du produit mixte et du produit vectoriel, on obtient comme annoncé
$$\begin{aligned}
\oint_C \Phi\,\mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} &= \iint_\Sigma (\nabla\Phi \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \\
&= \iint_\Sigma (\mathbf{n} \wedge \nabla\Phi) \cdot \mathbf{e}\, d\sigma \\
&= -\mathbf{e} \cdot \iint_\Sigma (\nabla\Phi \wedge \mathbf{n})\, d\sigma \\
&= -\mathbf{e} \cdot \iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}
\end{aligned}$$
puisque $\mathbf{e}$ est constant.

Le vecteur $\mathbf{e}$ constant pouvant sortir de l'intégrale du membre de gauche, la relation peut aussi s'écrire
$$\mathbf{e} \cdot \oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\mathbf{e} \cdot \iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma} \tag{$\heartsuit$}$$
Puisque $\mathbf{e}$ est un vecteur non nul de direction quelconque, on en déduit que
$$\oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}$$
Alternativement, on peut observer que ($\heartsuit$) conduit en particulier a
$$\begin{cases}
\mathbf{e}_x \cdot \oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\mathbf{e}_x \cdot \iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{e}_y \cdot \oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\mathbf{e}_y \cdot \iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma} \\
\mathbf{e}_z \cdot \oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\mathbf{e}_z \cdot \iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}
\end{cases}$$
qui exprime l'égalité composante par composante des deux membres de
$$\oint_C \Phi \;\; d\mathbf{s} = -\iint_\Sigma \nabla\Phi \wedge d\boldsymbol{\sigma}$$

Question II

i. La fonction est définie pour tous les $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série numérique correspondante converge.
Comme le terme général de la série est de signe variable, appliquons le critère du quotient à la série des modules :
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = |t-1|^2 \lim_{k\to+\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = (t-1)^2$$
ce qui permet d'affirmer que la série
- converge (absolument) si $(t-1)^2 < 1$, soit pour $t \in]0,2[= \mathtt{I}$,
- diverge pout $t \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$.

Dans les cas où $t = 0$ ou $t = 2$, la série s'écrit respectivement
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$
et, par comparaison avec la série harmonique, diverge dans les deux cas.
Par conséquent, la série converge uniquement sur $\mathtt{I} =]0,2[$ (et ce absolument) et la fonction est donc définie sur $\mathtt{E} = \mathtt{I}$.

ii. En tant que série de puissances, la série considérée est continue et indéfiniment continûment dérivable terme à terme sur son intervalle de convergence $\mathtt{I} = \mathtt{E}$.

iii. Par dérivation terme à terme, il vient
$$f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \frac{(t-1)^{2k}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(t-1)^2\right]^k$$
La dérivée prend donc la forme d'une série géométrique de raison $q = (t-1)^2$ inférieure à 1 sur $\mathtt{E} =]0,2[$ de sorte que
$$f'(t) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(t-1)^2} \qquad \forall t \in \mathtt{E}$$
Dès lors,
$$f(t) = \int \frac{1}{1-(t-1)^2} dt + C = \operatorname{arcth}(t-1) + C$$
où la constante d'intégration $C = 0$ puisque $f(1) = 0$. La fonction représentée par la série est donc décrite par
$$f(t) = \operatorname{arcth}(t-1) \qquad \forall t \in]0,2[$$
Méthode alternative pour le calcul d'une primitive
On peut également déterminer une primitive en notant que
$$f'(t) = \frac{1}{1-(t-1)^2} = \frac{1}{t(2-t)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right)$$
de sorte que
$$f(t) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\right) dt + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t}{t-2}\right| + C$$
En tenant compte du fait que $f(1) = 0$, on fixe la constante d'intégration $C = 0$ et on obtient
$$f(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{2-t} \qquad \forall t \in]0,2[$$

Question III

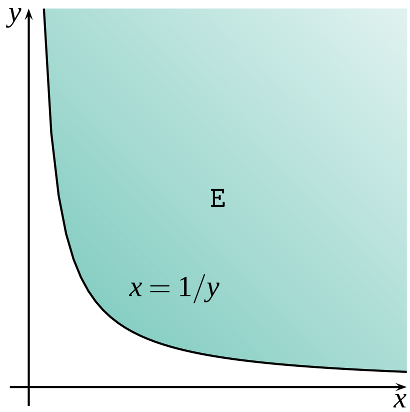
L'intégrale proposée

$$I = \int_0^{+\infty} dy \int_{1/y}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x^2 y}\, dx$$

ne peut être évaluée telle quelle. Elle peut cependant être vue comme une des réductions possibles de l'intégrale double

$$I_d = \iint_E x^2\, \mathrm{e}^{-x^2 y}\ dxdy \quad \text{où} \quad \mathtt{E} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y > 0,\ x > \frac{1}{y} \right\}$$

pour autant que cette intégrale existe. Le domaine d'intégration E est représenté sur la figure ci-dessous.



Pour calculer I_d, on considère la réduction

$$\begin{aligned} I_d &= \int_0^{+\infty} dx \int_{1/x}^{+\infty} x^2\, \mathrm{e}^{-x^2 y}\ dy \\ &= \int_0^{+\infty} \left[-\, \mathrm{e}^{-x^2 y} \right]_{1/x}^{+\infty}\ dy \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, dx \\ &= \left[-\, \mathrm{e}^{-x} \right]_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

L'intégrand étant positif sur le domaine d'intégration, l'existence de I_d est assurée par l'existence des intégrales successives évaluées ci-dessus (Tonelli). Ces intégrales partielles existent puisque

$$\mathrm{e}^{-x^2 y} \in C_0([1/x, +\infty[)\ \ \forall x > 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x^2 y} = o\left(\frac{1}{y^2}\right), \quad (y \to +\infty)$$

et

$$\mathrm{e}^{-x} \in C_0([0, +\infty[) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \to +\infty)$$

En vertu du thèorème Fubini, l'intégrale double I_d peut être calculée dans n'importe quel ordre de sorte que

$$I_d = I = 1.$$

Question IV

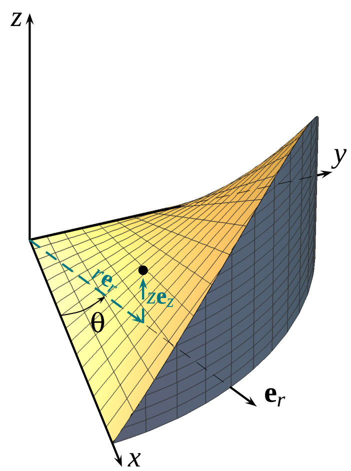
i. Le volume à calculer s'exprime par

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dx\,dy\,dz$$

où

$$\mathtt{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,\ y,\ z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq a^2,\ bz \leq xy\}$$

Vu la configuration, et en particulier le fait que E a comme base un quart de disque, il est préférable d'exprimer cette intégrale en coordonnées cylindriques.



Dans ces coordonnées, l'équation de la surface Σ s'écrit

$$bz = r^2 \cos\theta \sin\theta = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

et le domaine d'intégration devient

$$\mathtt{E} = \left\{ (r,\theta,z) : r \in [0,a],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ z \in \left[0, \frac{r^2 \sin 2\theta}{2b}\right] \right\}$$

On peut alors exprimer le volume par

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r\,dr \int_0^{\frac{r^2\sin 2\theta}{2b}} dz$$

où r est le Jacobien associé au passage en coordonnées cylindriques.
On a alors

$$V = \frac{1}{2b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr = \frac{a^4}{8b} \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{8b}$$

ii. L'aire d'une surface courbe est donnée par

$$\mathcal{A} = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

où $\mathbf{s}(u,v)$ désigne une paramétrisation de cette surface et Ω l'ensemble de variation des paramètres.

La surface Σ limitant supérieurement un ensemble dont la base est un quart de disque, le vecteur position de ses points sera avantageusement exprimé en coordonnées cylindriques. On a

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + z(r,\theta)\mathbf{e}_z$$

où, comme établi au point i.,

$$z(r,\theta) = \frac{r^2 \sin 2\theta}{2b}$$

soit

$$\mathbf{s}(r,\theta) = r\,\mathbf{e}_r(\theta) + \frac{r^2 \sin 2\theta}{2b}\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad r \in [0,a] \quad \text{et} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

On calcule ensuite successivement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \mathbf{e}_r + \dfrac{r \sin 2\theta}{b}\mathbf{e}_z \\[2ex] \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = r\,\mathbf{e}_\theta + \dfrac{r^2 \cos 2\theta}{b}\mathbf{e}_z \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} &= \left(\mathbf{e}_r + \frac{r \sin 2\theta}{b}\mathbf{e}_z\right) \wedge \left(r\,\mathbf{e}_\theta + \frac{r^2 \cos 2\theta}{b}\mathbf{e}_z\right) \\ &= r(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta) + \frac{r^2 \sin 2\theta}{b}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\theta) + \frac{r^2 \cos 2\theta}{b}(\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_z) \\ &= r\mathbf{e}_z - \frac{r^2 \sin 2\theta}{b}\mathbf{e}_r - \frac{r^2 \cos 2\theta}{b}\mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \right\| &= \sqrt{r^2 + \frac{r^4 \sin^2 2\theta}{b^2} + \frac{r^4 \cos^2 2\theta}{b^2}} \\ &= \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{b^2}} = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}} \end{aligned}$$

L'aire de la surface Σ s'exprime alors par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r\sqrt{1 + \frac{r^2}{b^2}}\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{b^2}{3}\left(1 + \left[\frac{r}{b}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{\pi b^2}{6}\left[\left(1 + \left[\frac{a}{b}\right]^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] \end{aligned}$$