NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2021

MATH0502 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 2
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.

Question I : Suites et séries

A. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{1+x^2}$$

i. Calculez I en évaluant directement l'intégrale.

ii. Exprimez l'intégrande sous la forme d'une série de puissances de x. Pour quelles valeurs de x cette représentation en série est-elle valable ?

iii. En exploitant le résultat du point précédent, exprimez I sous la forme d'une série numérique. Justifiez.

iv. Sur base des résultats ci-dessus, montrez que le nombre π peut s'exprimer sous la forme d'une série numérique du type $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Donnez l'expression de a_k.

v. Déterminez une condition sur n pour que la somme partielle $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ constitue une expression approchée de π entachée d'une erreur inférieure à 10^{-3} en valeur absolue. Les valeurs de n et de la somme partielle ne sont pas attendues.

B. Montrez que si a_k est le terme général d'une série numérique à termes positifs divergente et si b_k est le terme général d'une série numérique à termes positifs tels que $a_k = O(b_k)$ pour $k \to +\infty$ alors $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

Tournez la page.

Question II : Intégration dans $\mathbb{R}$

A. Étudiez l'existence des intégrales suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre réel $\beta > 0$.

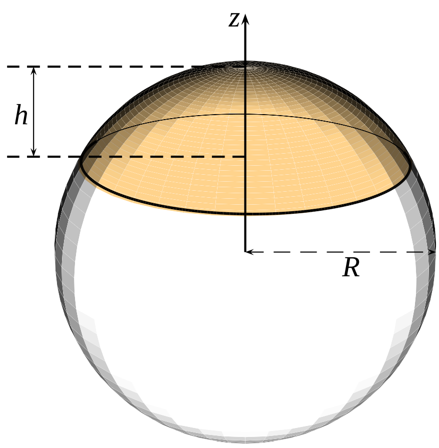
i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

ii. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{x^{\beta}(1-x)^{\beta}}\, dx$

B. Si f appartient à $\mathbb{L}_1(]1,2[)$, peut-on affirmer que $f^2 \in \mathbb{L}_1(]1,2[)$? Justifiez.

Question III : Intégration dans $\mathbb{R}^n$

A. On considère une calotte sphérique de hauteur h découpée dans une sphère de rayon R (voir figure) et portant sur sa surface extérieure Σ (pas sur la base circulaire sur laquelle elle s'appuie) une charge électrique par unité de surface $\rho(z) = \alpha z$ où z désigne la coordonnée verticale mesurée à partir du niveau du centre de la sphère et α est une constante réelle.



Calculez la charge électrique totale

$$Q = \iint_{\Sigma} \rho(z)\, d\sigma$$

portée par la calotte sphérique. L'usage des coordonnées sphériques est déconseillé.

B. Soit V un domaine compact régulier de $\mathbb{R}^3$, Σ la frontière fermée régulière de celui-ci, $\mathbf{n}$ la normale extérieure à cette surface et $\mathbf{F}$ un champ vectoriel continument dérivable sur V. En appliquant le théorème de Gauss au champ vectoriel $\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}$ où $\mathbf{e}$ désigne un vecteur constant, démontrez que

$$\iiint_V \nabla \wedge \mathbf{F}\, dV = -\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma$$

Rappel : $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$

SOLUTION

Question I : Suites et séries

A. i.

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^{\sqrt{3}/3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

ii. En utilisant le résultat connu relatif à la somme de la série géométrique,

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k, \quad y \in]-1,1[$$

on a

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k, \quad -x^2 \in]-1,1[$$

soit

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad x \in]-1,1[$$

iii. Utilisant le résultat du point précédent, on peut écrire

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\, dx$$

où l'intégration de la série de puissances peut être effectuée terme à terme sur $[0,\sqrt{3}/3]$ qui est inclus dans son intervalle de convergence $]-1,1[$, de sorte que

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\sqrt{3}/3} x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^{\sqrt{3}/3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1}$$

iv. En égalant les deux expressions obtenues pour I, on a

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1}$$

et donc

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 6}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

où

$$a_k = \frac{6}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2k+1} = \frac{2\sqrt{3}}{(2k+1)3^k}$$

v. La série représentant le nombre π étant une série alternée dont le terme général tend monotonément vers 0, l'erreur commise en approchant sa valeur par une somme partielle est en valeur absolue inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé. On peut donc approcher π avec une erreur inférieure à 10^{-3} par

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2\sqrt{3}}{(2k+1)3^k}$$

si n est tel que

$$\frac{2\sqrt{3}}{\Big(2(n+1)+1\Big)3^{n+1}} = \frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}} \leq 10^{-3}$$

B. Le comportement $a_k = O(b_k)$ pour $k \to +\infty$ peut être traduit par

$$(\exists C > 0 \text{ et } N > 0)(\forall\, k \geq N)\ :\ |a_k| \leq C|b_k|$$

de sorte que

$$|b_k| \geq \frac{1}{C}|a_k|, \quad \forall\, k \geq N$$

et, puisque a_k et b_k sont des termes généraux positifs, par

$$b_k \geq \frac{1}{C}a_k, \quad \forall\, k \geq N$$

Comme a_k est le terme général d'une série divergente, le critère de comparaison permet de conclure que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge.

Question II : Intégration dans $\mathbb{R}$

A. i. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \in C_0(]0,+\infty[)$$

  Cette fonction est donc intégrable sur tout fermé borné inclus dans $]0,+\infty[$. Il convient encore d'envisager son comportement au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

- On a

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (x \to 0^+)$$

  de sorte que l'intégrabilité est assurée au voisinage de 0^+.

- La présence de l'exponentielle décroissante indique aussi que

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (x \to +\infty)$$

  de sorte que l'intégrabilité est assurée au voisinage de $+\infty$.

En conclusion, l'intégrale existe.

ii. Soit

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{\beta}(1-x)^{\beta}}\, dx$$

- Nous constatons d'abord que, quel que soit $\beta > 0$,

$$\frac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta} \in C_0(]0,1[)$$

Cette fonction est donc intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans $]0,1[$. Il convient encore d'envisager ses comportements au voisinage de 0^+ et de 1.

- Au voisinage de $x = 1$, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\ln x \sim x - 1, \quad (x \to 1)$$

de sorte que

$$\frac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta} \sim \frac{x-1}{(1-x)^\beta} = \frac{-1}{(1-x)^{\beta-1}}, \quad (x \to 1)$$

L'intégrabilité est donc assurée au voisinage de 1 si et seulement si $\beta - 1 < 1$ ou encore $\beta < 2$.

- ◇ Au voisinage de 0^+, on a

$$\frac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta} \sim \frac{\ln x}{x^\beta}$$

L'intégrabilité au voisinage de 0^+ est donc assurée pour $\beta < 1$ puisque, dans ce cas, $\exists \alpha = (1+\beta)/2 < 1$ tel que

$$\frac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta} = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad (x \to 0^+)$$

Nous ne pouvons en tirer aucune conclusion pour $\beta \geq 1$.

◇ On a par contre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{\dfrac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\beta-1}}{\ln x} = 0 \quad \forall \beta \geq 1$$

de sorte que

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{\ln x}{x^\beta(1-x)^\beta}\right), \ (x \to 0^+) \quad \forall \beta \geq 1$$

ce qui assure que la fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0^+ si $\beta \geq 1$.

En conclusion, l'intégrale existe si et seulement si $\beta < 1$

B. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple constitué par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

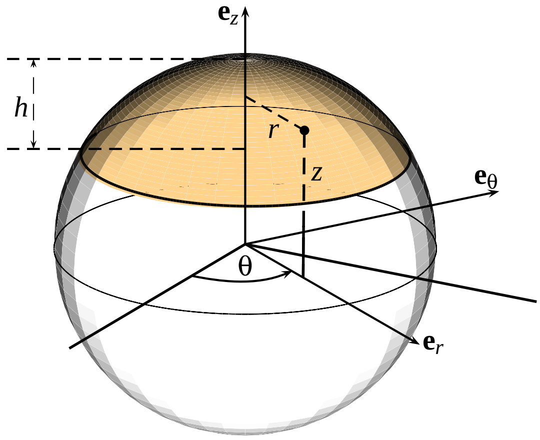
En effet, $f \in \mathbb{L}_1(]1,2[)$ puisque $f \in C_0(]1,2])$ et f est intégrable au voisinage de 1^+.
Par contre,

$$f^2(x) = \frac{1}{x-1} \notin \mathbb{L}_1(]1,2[)$$

puisque $\dfrac{1}{x-1}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1.

Question III : Intégration dans $\mathbb{R}^n$

A. La symétrie de révolution autour de l'axe OZ du domaine d'intégration ainsi que la dépendance de l'intégrande en la coordonnée verticale z conduisent naturellement à envisager une paramétrisation de la surface Σ basée sur les coordonnées cylindriques.



On a alors (voir figure)

$$\mathbf{s}(\theta, z) = r(z)\, \mathbf{e}_r(\theta) + z\, \mathbf{e}_z$$

où la relation $r(z)$ est déterminée en exprimant que les points de Σ appartiennent à la sphère de rayon R centrée à l'origine des axes et d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{ou, en coordonnées cylindriques,} \quad r^2 + z^2 = R^2$$

de sorte que $r = \sqrt{R^2 - z^2}$.

La paramétrisation de la calotte sphérique Σ s'écrit donc

$$\mathbf{s}(\theta, z) = \sqrt{R^2 - z^2}\, \mathbf{e}_r(\theta) + z\, \mathbf{e}_z$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in [R - h, R]$.

On calcule facilement

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = \sqrt{R^2 - z^2}\, \mathbf{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\, \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z$$

de sorte que

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \sqrt{R^2 - z^2}\, \mathbf{e}_\theta \wedge \left(\frac{-z}{\sqrt{R^2 - z^2}}\, \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z \right)$$

$$= -z\, \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r + \sqrt{R^2 - z^2}\, \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_z = z\, \mathbf{e}_z + \sqrt{R^2 - z^2}\, \mathbf{e}_r$$

et

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| = \sqrt{z^2 + R^2 - z^2} = R$$

La charge électrique totale portée par la calotte sphérique est donc donnée par

$$\begin{aligned}
Q &= \iint_{\Sigma} \rho(z)\, d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-h}^{R} \left\| \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} \right\| \rho(z)\, dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R-h}^{R} R\, \alpha z\, dz \\
&= 2\pi R \alpha \left[\frac{z^2}{2} \right]_{R-h}^{R} \\
&= \pi \alpha R h (2R - h)
\end{aligned}$$

B. Sur le compact régulier V de frontière Σ, le théorème de Gauss s'écrit

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à Σ.
Appliquant ce théorème au champ vectoriel $\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}$ où $\mathbf{e}$ est un vecteur constant, on a

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{F} \wedge \mathbf{e})\, dV = \iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

La formule donnée dans l'énoncé permet d'écrire

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F})$$

puisque $\mathbf{e}$ est un vecteur constant. Par ailleurs, en effectuant une permutation circulaire du produit mixte,

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}\, d\sigma = -\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}\, d\sigma$$

On a donc

$$\iiint_V \mathbf{e} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{F})\, dV = -\iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}\, d\sigma$$

ou encore, puisque $\mathbf{e}$ est un vecteur constant qui peut être sorti des intégrales,

$$\mathbf{e} \cdot \left(\iiint_V (\nabla \wedge \mathbf{F})\, dV \right) = \mathbf{e} \cdot \left(-\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma \right)$$

Cette égalité étant vérifiée quel que soit le vecteur constant $\mathbf{e}$ considéré, on en déduit

$$\iiint_V \nabla \wedge \mathbf{F}\, dV = -\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma$$