LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2019

MATH0502 - Analyse Mathématique 2
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Énoncez le critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques.

ii. Montrez que la suite de fonctions $\{f_k(x)\}$ où $f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

iii. Déterminez, en fonction de la variable x, la tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la courbe $\mathcal{C}$ définie par le graphique de la fonction $f(x)$ continûment dérivable sur $[a, b]$ ainsi que l'expression de l'abscisse curviligne s mesurée à partir du point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(a, f(a))$.

iv. Montrez que, si $\mathtt{K} \subset \mathbb{R}^3$ est un compact régulier dont la frontière $\partial\mathtt{K}$ est constituée d'une ou plusieurs surfaces fermées régulières par morceaux alors

$$\iint_{\partial K} \Phi\, \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathtt{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale unitaire extérieure à $\mathtt{K}$ et Φ est un champ scalaire. Déduisez-en que

$$\iint_{\partial K} \Phi\, \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathtt{K}} \nabla\Phi\, dx\, dy\, dz$$

Donnez des conditions suffisantes sur Φ pour lesquelles ces identités sont vérifiées.

Question II

Résolvez le problème différentiel

$$\begin{cases} xy''(x) - y(x) = x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

en exprimant la solution sous la forme d'une série de puissances de x. Sur quel ensemble la solution est-elle valable ?

Tournez la page.

Question III

Étudiez l'existence des intégrales suivantes en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$:

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} dx$

ii. $\displaystyle\iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} \frac{x}{(x^2+y^2)^\beta} dxdy$

Question IV

On considère l'ensemble

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq h(h-z)\right\}$$

et la courbe

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2+y^2 = h(h-z),\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, h\right\}$$

où $h > 0$ désigne un paramètre.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ et $\mathcal{C}$.

ii. Calculez le volume de $\mathtt{E}$.

iii. Calculez la longueur de $\mathcal{C}$.

Question I

i. Le critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques s'énonce de la façon suivante : la série $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (avec $u_k \in \mathbb{C}$) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, *i.e.* si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q \geq p \geq N) : \left| \sum_{k=p}^{q} u_k \right| \leq \varepsilon$$

ii. D'une part, pour tout x fixé dans $[0, +\infty[$, on a

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} kx\mathrm{e}^{-kx} = 0$$

de sorte que la suite converge vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
La convergence n'est cependant pas uniforme sur $[0, +\infty[$ car l'erreur $|f_k(x) - 0|$ au point $x = 1/k \in [0, +\infty[$ est égale à e^{-1} de sorte l'erreur ne peut être rendue arbitrairement petite simultanément pour toutes les valeurs de $x \in [0, +\infty[$.

iii. La courbe définie par le graphique de $f \in C_1([a, b])$ admet la paramétrisation

$$\mathbf{s}(x) = x\mathbf{e}_x + f(x)\mathbf{e}_y, \qquad x \in [a, b]$$

La tangente à la courbe est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{s}'(x)}{\|\mathbf{s}'(x)\|} = \frac{\mathbf{e}_x + f'(x)\mathbf{e}_y}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

puisque

$$\mathbf{s}'(x) = \mathbf{e}_x + f'(x)\mathbf{e}_y$$

De même, l'abscisse curviligne d'origine $\mathbf{s}(a)$ est donnée par

$$s(x) = \int_a^x \|\mathbf{s}'(t)\| dt = \int_a^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

iv. Par application du théorème de Gauss (théorème de la divergence)

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathrm{K}} \nabla \cdot \mathbf{F} dx\, dy\, dz$$

au champ vectoriel $\mathbf{F} = \Phi \mathbf{e}_x$, on a

$$\iint_{\partial K} \Phi\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathrm{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

En procédant de la même façon avec les champs vectoriels $\Phi \mathbf{e}_y$ et $\Phi \mathbf{e}_z$, on établit également

$$\iint_{\partial K} \Phi\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathrm{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx\, dy\, dz$$

$$\iint_{\partial K} \Phi\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathrm{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

En combinant ces expressions, on obtient

$$\mathbf{e}_x \iint_{\partial K} \Phi \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \mathbf{e}_y \iint_{\partial K} \Phi \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \mathbf{e}_z \iint_{\partial K} \Phi \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$
$$= \mathbf{e}_x \iiint_{\mathtt{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx\, dy\, dz + \mathbf{e}_y \iiint_{\mathtt{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx\, dy\, dz + \mathbf{e}_z \iiint_{\mathtt{K}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx\, dy\, dz$$

soit, comme annoncé,

$$\iint_{\partial K} \Phi\, \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\mathtt{K}} \nabla \Phi\, dx\, dy\, dz$$

puisque

$$(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n})\mathbf{e}_z = \mathbf{n}$$

et

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

Les résultats sont au moins valables dans le cadre des hypothèses du théorème de Gauss, ce qui se traduit ici par la condition suffisante $\Phi \in C_1(\mathtt{K})$.

Question II

Recherchons une solution de

$$xy''(x) - y(x) = x$$

sous la forme de la série de puissances

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

où les coefficients a_k sont à déterminer. Sur son intervalle de convergence $\mathtt{I}$, lequel sera déterminé par la suite, toute série de puissances est indéfiniment continûment dérivable terme à terme de sorte que

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$$

et

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k x^{k-2}$$

Les conditions initiales données permettent d'écrire

$$y(0) = a_0 = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = a_1 = 0$$

de sorte que, finalement,

$$y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$$

En remplaçant dans l'équation différentielle $y(x)$ et $y''(x)$ par leur expression, il vient

$$x \sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = x$$

soit

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1)\,a_k\,x^{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,x^k = x$$

que l'on peut encore écrire, en changeant l'indice sommatoire dans la première somme,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\,k\,a_{k+1}\,x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,x^k = x$$

ou encore, successivement,

$$2a_2x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)\,k\,a_{k+1}\,x^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_k\,x^k = x$$

$$(2a_2-1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \Big[(k+1)\,k\,a_{k+1} - a_k\Big]x^k = 0$$

Cette équation devant être vérifiée en tout point x de l'intervalle de convergence, on en déduit que $a_2 = 1/2$ et que les coefficients a_k vérifient la relation de récurrence

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1)k} \qquad \forall k \geq 2 \tag{†}$$

On obtient successivement

$$a_3 = \frac{a_2}{3\cdot 2},\quad a_4 = \frac{a_3}{4\cdot 3} = \frac{a_2}{(4\cdot 3)(3\cdot 2)},\quad a_5 = \frac{a_4}{5\cdot 4} = \frac{a_2}{(5\cdot 4\cdot 3)(4\cdot 3\cdot 2)},\cdots$$

et plus généralement

$$a_k = \frac{a_2}{\frac{k!}{2}(k-1)!} = \frac{1}{k!(k-1)!} \tag{‡}$$

de sorte que

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^k}{k!(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k!(k-1)!}$$

L'intervalle de convergence de la série de puissances peut être déterminé par l'application du critère du quotient à la série des modules, ce qui donne, en utilisant (†) ou (‡),

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_kx^k|} = |x| \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(k+1)k} = 0$$

Puisque cette limite est nulle quelle que soit la valeur de x, on en déduit que l'intervalle de convergence $\mathtt{I}$ de la série est égal à $\mathbb{R}$. La solution obtenue est donc valable sur $\mathbb{R}$.

Question III

i. Soit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta}dx$$

Nous constatons tout d'abord que, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} \in C_0\,(]0,+\infty[)$$

Dès lors, l'existence de l'intégrale dépend uniquement de l'intégrabilité de cette fonction aux voisinages de 0^+ et de $+\infty$.

Dans un premier temps, étudions l'intégrabilité au voisinage de 0^+. On a, quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} \sim \ln x = o\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\right], \qquad (x \to 0^+)$$

donc la fonction est bien intégrable au voisinage de 0^+ quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} \sim \frac{\ln x}{x^{2\beta}}, \qquad (x \to +\infty) \tag{†}$$

Si $\beta \leq 1/2$, il vient dès lors

$$\frac{1}{x} = o\left[\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta}\right], \qquad (x \to \infty)$$

et la fonction n'est pas intégrable au voisinage de l'infini.
Dans le cas où $\beta > 1/2$, on peut préciser le comportement asymptotique (†) en remarquant que

$$\ln x = o\left(x^\varepsilon\right), \ (x \to +\infty) \qquad \forall \varepsilon > 0$$

de sorte que

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} = o\left[\frac{1}{x^{2\beta-\varepsilon}}\right], \qquad (x \to +\infty)$$

Si $\beta > 1/2$, on peut toujours trouver $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = \beta - 1/2$) tel que $\alpha = 2\beta - \varepsilon > 1$ et

$$\frac{\ln x}{(1+x^2)^\beta} = o\left[\frac{1}{x^\alpha}\right], \qquad (x \to +\infty)$$

ce qui entraine l'intégrabilité au voisinage de l'infini.

En conclusion, l'intégrale existe si et seulement si $\beta > \dfrac{1}{2}$.

ii. Soit

$$I = \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} \frac{x}{(x^2+y^2)^\beta} dxdy$$

L'intégrand est continu sur le domaine d'intégration $\mathtt{E} =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ mais celui-ci est non borné. On ne peut donc s'appuyer sur la continuité pour justifier l'intégrabilité.

La fonction

$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^\beta}$$

étant positive sur $\mathtt{E}$, elle est égale à son module. Par le critère de Tonelli, l'intégrale existe donc si on peut trouver un ordre d'intégration partielle de f qui a du sens. On considère dès lors l'existence de la suite des intégrales partielles

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+y^2)^\beta} dx$$

Pour tout $y > 0$, l'intégrand est continu sur $[0,+\infty[$ par rapport à x et

$$\frac{x}{(x^2+y^2)^\beta} \sim \frac{1}{x^{2\beta-1}}, \qquad (x \to +\infty)$$

de sorte que l'intégrale par rapport à x existe si et seulement si $2\beta - 1 > 1$, ou encore $\beta > 1$.

Sous cette condition, on calcule

$$g(y) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+y^2)^\beta} dx = \frac{1}{2(1-\beta)} \left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{\beta-1}} \right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2(\beta-1)} \frac{1}{y^{2(\beta-1)}}$$

On constate ensuite que la fonction $g(y)$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$ car l'intégrabilité au voisinage de 0 demande $2(\beta-1) < 1$ alors que l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ introduit la condition opposée $2(\beta-1) > 1$.

On en déduit que l'intégrale I n'existe pour aucune valeur de β car, si l'intégrale existait, sa valeur pourrait être calculée en adoptant n'importe quel ordre d'intégration partielle (Fubini).

De façon alternative, l'étude de l'intégrabilité peut être simplifiée en exprimant l'intégrale en coordonnées polaires. L'intégrale proposée existe si et seulement si elle existe également après application de ce changement de variables. Dans ce cas, les différents ordres d'intégration partielle ont du sens et conduisent à la même valeur (Fubini). En particulier, l'intégrale sur le premier quadrant admet la réduction

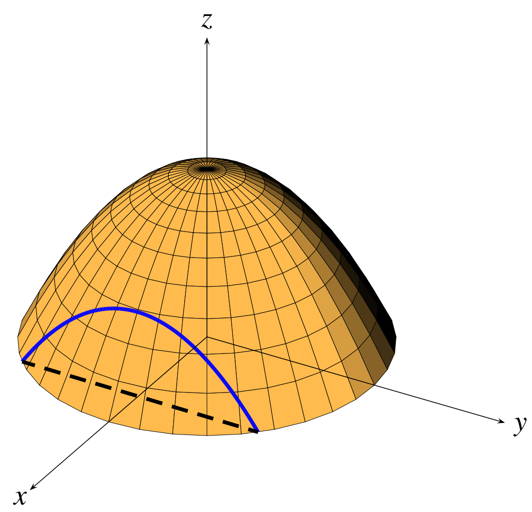
$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r\cos\theta}{r^{2\beta}} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^{2\beta-2}} dr$$

L'intégrale par rapport à r n'existe pas car l'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$ introduit des conditions incompatibles sur β. Dès lors, on en déduit que l'intégrale proposée n'existe pour aucune valeur de β.

Question IV

i. La surface d'équation $x^2+y^2 = h(h-z)$ est une surface de révolution d'axe z. Ses intersections avec des plans $x =$ constante ou $y =$ constante donnent des paraboles et celle avec un plan $z =$ constante un cercle de rayon $\sqrt{h(h-z)}$ qui diminue avec z.

L'ensemble `E` correspond donc à l'intérieur du paraboloïde limité par le plan $z = 0$ et dont le sommet se trouve en $z = h$.



La courbe $\mathcal{C}$ est une parabole située à l'intersection de la surface de l'ensemble $\mathtt{E}$ et du plan $x = \sqrt{2}h/2$. Son équation s'obtient en introduisant $x = \sqrt{2}h/2$ dans l'équation du paraboloïde $x^2 + y^2 = h(h-z)$, soit

$$z = -\frac{y^2}{h} + \frac{h}{2} \quad \text{où} \quad y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right]$$

ii. Le volume à calculer s'exprime par

$$V = \iiint_{\mathtt{E}} dx\,dy\,dz$$

où

$$\mathtt{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq h(h-z)\}$$

Considérant la symétrie de révolution, il est préférable d'exprimer cette intégrale en coordonnées cylindriques. Dans ces coordonnées, l'équation du paraboloïde devient

$$r^2 = h(h-z)$$

et le domaine d'intégration

$$\mathtt{E}' = \left\{(r,\theta,z) : \theta \in]0,2\pi[,\ z \in]0,h[,\ r \in]0,\sqrt{h(h-z)}\,[\right\}$$

On peut alors exprimer le volume par

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^{\sqrt{h(h-z)}} r\,dr$$

où r est le Jacobien associé au passage en coordonnées cylindriques. On a alors

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{h(h-z)}} dz = \pi \int_0^h h(h-z)\,dz \\ &= \pi h \left[hz - \frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{\pi h^3}{2} \end{aligned}$$

iii. La courbe $\mathcal{C}$ étant une portion de parabole, le vecteur position de ses points sera avantageusement exprimé en coordonnées cartésiennes. On a

$$\mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

où

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}h \quad \text{et} \quad z = -\frac{y^2}{h} + \frac{h}{2}$$

soit

$$\mathbf{s}(y) = \frac{\sqrt{2}}{2}h\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + \left(-\frac{y^2}{h} + \frac{h}{2}\right)\mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad y \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}h, \frac{\sqrt{2}}{2}h\right]$$

On calcule successivement

$$\mathbf{s}'(y) = \mathbf{e}_y - \frac{2y}{h}\mathbf{e}_z$$

et

$$\|\mathbf{s}'(y)\| = \sqrt{1 + \frac{4y^2}{h^2}}$$

de sorte que, en tenant compte de la symétrie de la courbe,

$$L = \int_{-\sqrt{2}h/2}^{\sqrt{2}h/2} \sqrt{1 + \frac{4y^2}{h^2}}\, dy = 2\int_0^{\sqrt{2}h/2} \sqrt{1 + \frac{4y^2}{h^2}}\, dy$$

Le changement de variable régulier

$$\operatorname{sh} t = \frac{2y}{h}, \quad \operatorname{ch} t\, dt = \frac{2}{h}\, dy$$

permet de transformer cette intégrale en

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\operatorname{arcsh}\sqrt{2}} \frac{h}{2} \operatorname{ch}^2 t\, dt = h\int_0^{\operatorname{arcsh}\sqrt{2}} \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\, dt \\
&= \frac{h}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right]_0^{\operatorname{arcsh}\sqrt{2}} \\
&= \frac{h}{2}\left[\operatorname{arcsh}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(2\operatorname{arcsh}\sqrt{2})\right] = \frac{h}{2}\left[\operatorname{arcsh}\sqrt{2} + \operatorname{sh}(\operatorname{arcsh}\sqrt{2})\operatorname{ch}(\operatorname{arcsh}\sqrt{2})\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[\operatorname{arcsh}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}\right] = \frac{h}{2}\left[\operatorname{arcsh}\sqrt{2} + \sqrt{6}\right]
\end{aligned}$$