où $\lambda_i(\mathsf{A}^*\mathsf{A})$ désigne les valeurs propres de la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ (Cf. chapitre 4). On peut montrer (Cf. par exemple Bellman, 1960) que ces normes matricielles sont compatibles avec les normes vectorielles correspondantes définies par (2.48)-(2.50) et vérifient

$$\forall \mathsf{A} \in \mathbb{C}_n^n, \quad \|\mathsf{A}\|_2^2 \leq \|\mathsf{A}\|_1 \, \|\mathsf{A}\|_\infty \tag{2.61}$$

2.7 Vecteurs libres de l'espace physique.

Les concepts généraux introduits dans les sections précédentes s'appliquent, en particulier, aux vecteurs de l'espace tridimensionnel utilisés en géométrie et en physique. Profitant de la connaissance intuitive que chacun a de ceux-ci, plusieurs références à ces vecteurs ont été faites dans le texte qui précède.

De façon plus précise, un *vecteur géométrique* de l'espace physique à trois dimensions est défini comme un couple ordonné de points (P,Q) de cet espace, noté généralement sous la forme $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$. Le point P est l'*origine* du vecteur et Q en est l'*extrémité*. Graphiquement, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ peut être représenté par une flèche joignant P à Q.

On dit de deux vecteurs géométriques $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ qu'ils sont *équipollents* l'un à l'autre, ce qui s'écrit simplement $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ lorsque le quadrilatère $\mathrm{PP'Q'Q}$ est un parallélogramme (Fig. 2.1).

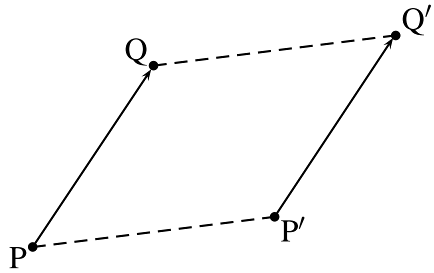


FIGURE 2.1: Vecteurs équipollents.

L'ensemble des vecteurs géométriques équipollents à un vecteur géométrique $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ donné est appelé un *vecteur libre*. Il est noté sous la forme **PQ** en gras (ou souligné en cas d'écriture manuscrite), sans flèche. Un vecteur libre caractérise donc une grandeur, une direction et un sens mais son origine ou son extrémité peut être fixée librement. Tout vecteur libre peut être représenté par un élément quelconque de l'ensemble des vecteurs géométriques qu'il désigne. Un tel vecteur géométrique est appelé un *représentant* du vecteur libre.

Les opérations d'addition de deux vecteurs libres et de multiplication par un réel sont définies géométriquement comme illustré à la figure 2.2.

- L'addition des vecteurs libres **a** et **b** est formée en considérant leurs représentants tels que l'extrémité du premier vecteur géométrique correspond à l'origine du second vecteur géométrique. Le vecteur géométrique joignant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du second vecteur constitue un représentant du vecteur libre $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

- La multiplication du vecteur libre **a** par un réel $\lambda > 0$ ne change ni la direction ni le sens de **a** mais multiplie sa grandeur par λ. Si $\lambda = 0$, alors $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne le vecteur de grandeur nulle. La multiplication de $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ par $\lambda = -1$ ne change ni la grandeur ni la direction de **a** mais en inverse le sens.

  Les vecteurs **a** et $\lambda\mathbf{a}$ sont dits *parallèles* l'un à l'autre.

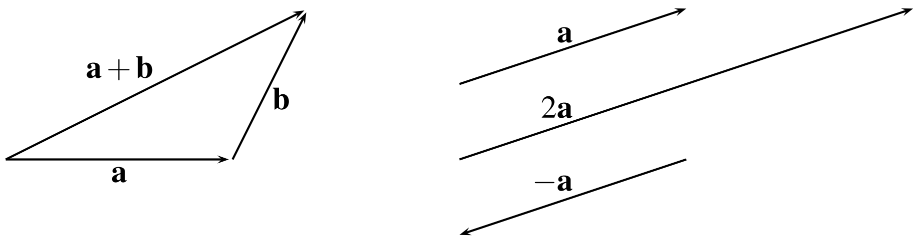


FIGURE 2.2: Addition de deux vecteurs et multiplication par un scalaire.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des vecteurs libres munis de ces opérations constitue un espace vectoriel réel. On peut vérifier que les opérations ainsi définies sur les vecteurs libres possèdent les propriétés requises introduites à la section 2.1. En particulier, on notera que $\mathbf{0}$ est le neutre pour l'addition et que le vecteur obtenu en multipliant **a** par $\lambda = -1$ est l'opposé de **a**.

Les concepts de base, d'indépendance linéaire, de composantes, ... définis de façon générale dans les sections précédentes s'appliquent naturellement aux éléments de cet espace vectoriel.

2.7.1 Norme et produit scalaire de vecteurs libres.

La *norme* $\|\mathbf{a}\|$ d'un vecteur libre **a** est définie comme étant la grandeur de celui-ci, *i.e.* la distance entre les origine et extrémité d'un quelconque de ses représentants. On vérifie aisément que cette définition possède les trois propriétés introduites à la section 2.6 pour définir une norme.

Dans le cas de vecteurs de l'espace tridimensionnel, le produit scalaire se note $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et peut être introduit géométriquement comme suit.

Le produit scalaire de deux vecteurs libres **a** et **b** est le scalaire défini par la formule

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta \tag{2.62}$$

où θ désigne l'angle ($0 \leq \theta \leq \pi$) entre les deux vecteurs, *i.e.* l'angle formé par les représentants de **a** et **b** qui partagent la même origine (Fig. 2.3).

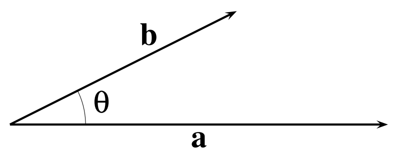


FIGURE 2.3

Le produit scalaire ainsi défini vérifie les propriétés générales énoncées précédemment et adaptées au cas d'un espace vectoriel réel, soit, pour tout $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$ et pour tout λ, $\mu \in \mathbb{R}$,

i. commutativité :
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{2.63}$$

ii. bi-linéarité
$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot (\mu \mathbf{b}) = \lambda \mu \, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{2.64}$$

iii. distributivité :
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{2.65}$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{2.66}$$

iv. définie positivité :
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \geq 0 \tag{2.67}$$
où l'égalité a lieu si et seulement si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

La dernière propriété montre que la norme correspondant à la grandeur du vecteur est la norme induite par le produit scalaire.

Les propriétés (2.63), (2.64) et (2.67) sont aisément justifiées par application de la définition (2.62).

Pour démontrer la distributivité, il convient d'abord d'interpréter le produit scalaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ comme le produit de $\|\mathbf{a}\|$ et de la projection orthogonale de $\mathbf{b}$ sur $\mathbf{a}$, cette projection étant comptée positivement si l'angle θ entre les deux vecteurs est aigu et négativement dans le cas contraire. Comme le montre la figure 2.4, cette interprétation conduit effectivement au résultat attendu.

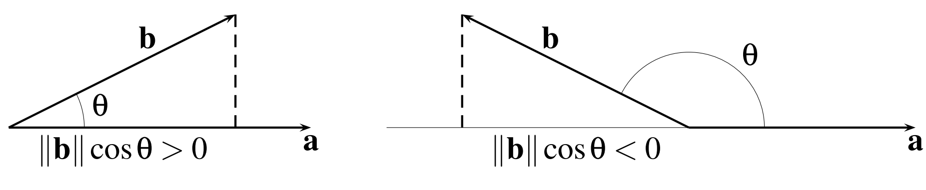


FIGURE 2.4

Partant de cette interprétation, la relation (2.65) peut être démontrée en considérant la figure 2.5.

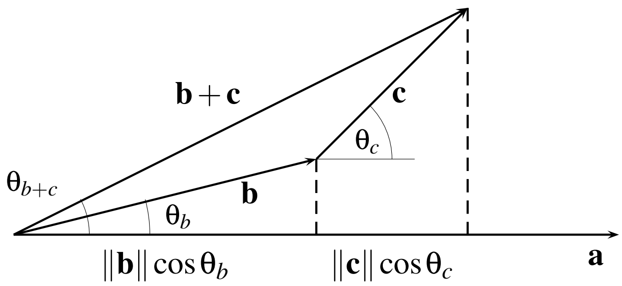


FIGURE 2.5

Les longueurs des projections des vecteurs $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ sur $\mathbf{a}$ sont telles que

$$\|\mathbf{b}+\mathbf{c}\|\cos\theta_{b+c} = \|\mathbf{b}\|\cos\theta_b + \|\mathbf{c}\|\cos\theta_c \tag{2.68}$$

Dès lors, en multipliant par $\|\mathbf{a}\|$, il vient

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}+\mathbf{c}\|\cos\theta_{b+c} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta_b + \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{c}\|\cos\theta_c \tag{2.69}$$

soit

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{2.70}$$

La distributivité à droite (2.66) peut être démontrée de la même façon ou en prenant en compte la commutativité du produit scalaire dans $\mathcal{E}$.

2.7.2 Base orthonormée.

Selon la définition (2.62) du produit scalaire dans $\mathcal{E}$,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathbf{a}=\mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{b}=\mathbf{0} \\ \quad \text{ou} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{2.71}$$

L'orthogonalité entre deux vecteurs non nuls introduite précédemment prend donc ici une interprétation géométrique puisqu'elle s'identifie à la *perpendicularité* entre ces vecteurs.

Dans ce cadre, une base orthonormée de $\mathcal{E}$ est composée de trois vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ mutuellement perpendiculaires et de grandeur unitaire, *i.e.* tels que

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{2.72}$$

Les trois vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ formant une base (orthonormée ou non) de $\mathcal{E}$ présentent une orientation *directe* ou *dextrorsum* si $\mathbf{e}_3$ est orienté dans le sens du déplacement d'un tire-bouchon qu'on fait tourner pour amener $\mathbf{e}_1$ sur $\mathbf{e}_2$ en balayant le plus petit angle géométrique (*règle du tire-bouchon*). De façon alternative, l'orientation directe est celle dans laquelle les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ sont dirigés respectivement selon le pouce, l'index et le majeur de la main droite (*règle de la main droite*). Dans le cas contraire, l'orientation est dite *rétrograde* ou *sinistrorsum*. Pour éviter toute confusion, on aura soin d'utiliser systématiquement une orientation directe du repère.

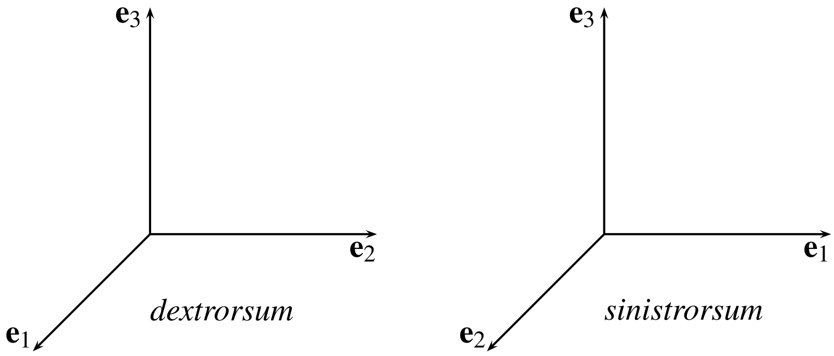


FIGURE 2.6: Bases orthononormées dextrorsum et sinistrorsum.

En exprimant les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans la base orthonormée formée des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, on a

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{2.73}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \tag{2.74}$$

où a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 sont les composantes (réelles) de ces deux vecteurs dans cette base. Par application de la distributivité du produit scalaire et des relations (2.72), on obtient

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{2.75}$$

et, en considérant le cas particulier où $\mathbf{b} = \mathbf{a}$,

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2.76}$$

Ces résultats constituent la particularisation des relations (2.32) et (2.33) à l'espace vectoriel réel $\mathcal{E}$. Comme dans le cas général, ces expressions simples du produit scalaire et de la norme en fonction des composantes des vecteurs ne sont valables que dans une base orthonormée.

2.7.3 Produit vectoriel.

Dans l'ensemble des vecteurs libres de l'espace à trois dimensions, on peut définir une nouvelle loi de composition interne de la façon suivante.

Le *produit vectoriel* des vecteurs non nuls et non parallèles $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de $\mathcal{E}$ est l'unique vecteur $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \in \mathcal{E}$ à la fois perpendiculaire à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{b}$ dont le sens est tel que le triplet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est orienté en sens direct[4] (Fig. 2.7) et dont la norme est donnée par

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta \tag{2.77}$$

où θ désigne l'angle ($0 \leq \theta \leq \pi$) entre les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{a}$ ou $\mathbf{b}$ est nul ou si les deux vecteurs sont parallèles, leur produit vectoriel est le vecteur nul $\mathbf{0}$.

En fonction de cette définition, le sens de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est donné géométriquement par le sens de déplacement d'un tire-bouchon qu'on fait tourner pour amener $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{b}$ en balayant le plus petit angle possible.

De façon alternative, le sens de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ est celui indiqué par le pouce de la main droite lorsqu'on replie les doigts de celle-ci dans le sens permettant d'appliquer $\mathbf{a}$ sur $\mathbf{b}$.

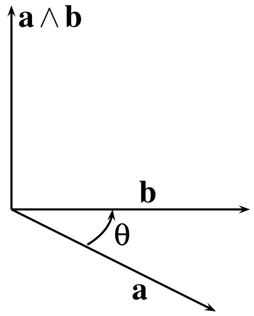


FIGURE 2.7

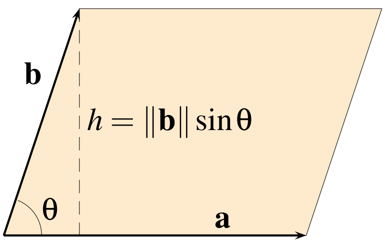


FIGURE 2.8

La norme du produit vectoriel $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$ permet de mesurer l'aire Σ du parallélogramme construit sur les représentants de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ partageant la même origine (Fig. 2.8). En effet,

$$\begin{aligned} \Sigma &= \|\mathbf{a}\| h = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\theta \\ &= \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| \end{aligned} \tag{2.78}$$

Le produit vectoriel est abondamment utilisé en physique.

EXEMPLE 2.7 La force exercée sur une particule de charge électrique q se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ est donnée par

$$\mathbf{F}_{mag} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

Cette force étant perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$, elle développe une puissance nulle, *i.e.*

$$\mathcal{P} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{mag} = \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0$$

◇

4. Cette définition s'applique dans le cas où $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orienté en sens direct, comme suggéré plus haut. Dans le cas d'un repère rétrograde, la définition doit être adaptée pour que les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ soient eux-mêmes orientés de façon rétrograde. Le sens de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (mais pas sa direction ni sa grandeur) dépend donc de l'orientation du repère utilisé. C'est pourquoi le produit vectoriel est généralement appelé un *pseudo-vecteur*.

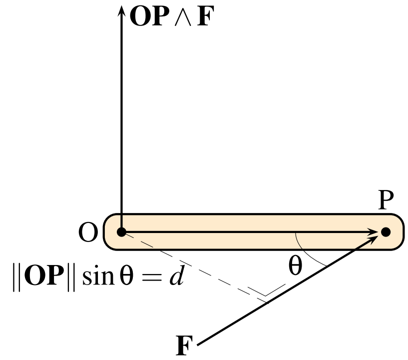
EXEMPLE 2.8 Si une force $\mathbf{F}$ s'applique en un point P d'un solide, on définit le moment $\mathbf{M}_O$ de la force par rapport à un point O par la relation

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{F}$$

La norme du moment peut s'exprimer sous la forme

$$\|\mathbf{M}_O\| = \|\mathbf{OP}\| \, \|\mathbf{F}\| \sin\theta = d\|\mathbf{F}\|$$

et est donc égale au produit de l'intensité de la force appliquée par la distance au point O de la ligne d'action de $\mathbf{F}$.



Pour qu'un système mécanique soit en équilibre en rotation, il faut que la somme vectorielle des moments des forces extérieures qui lui sont appliquées soit nulle. $\diamond$

Le produit vectoriel est

i. anti-commutatif
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{2.79}$$

ii. bi-linéaire
$$(\lambda \mathbf{a}) \wedge (\mu \mathbf{b}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \tag{2.80}$$

iii. distributif à gauche et à droite par rapport à l'addition

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \tag{2.81}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \tag{2.82}$$

Les deux première propriétés sont aisément démontrées directement à partir de la définition.

Pour démontrer les propriétés (2.81) et (2.82), il est utile d'interpréter le calcul du produit vectoriel de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ en une procédure à trois étapes illustrée à la figure 2.9 :

1. construction du plan Π perpendiculaire à $\mathbf{a}$ passant par l'origine commune des représentants de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et projection de $\mathbf{b}$ orthogonalement sur Π pour former le vecteur $\mathbf{b}'$;
2. rotation de $\pi/2$ de $\mathbf{b}'$ autour de $\mathbf{a}$ pour construire le vecteur $\mathbf{b}''$;
3. multiplication de $\mathbf{b}''$ par le scalaire $\|\mathbf{a}\|$ pour former le vecteur $\mathbf{b}''' = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

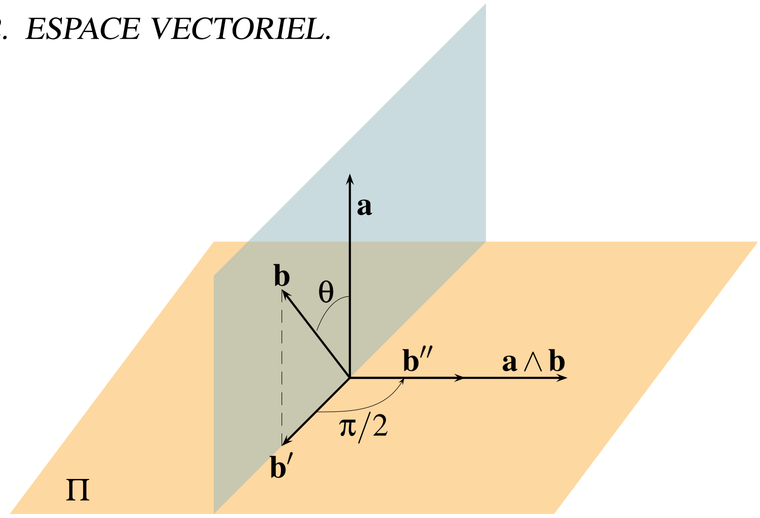


FIGURE 2.9

La procédure conduit effectivement au résultat attendu. En effet, d'une part, le vecteur $\mathbf{b}'''$ est perpendiculaire à $\mathbf{a}$ et à $\mathbf{b}$ et orienté dans le sens correspondant à la règle de la main droite. D'autre part, la norme du vecteur construit de cette façon est donnée par

$$\|\mathbf{b}'''\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}''\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}'\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta = \|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|$$

Cette équivalence étant acquise, on peut démontrer la propriété (2.82) en considérant la figure 2.10. Les projections des vecteurs $\mathbf{b}$, et $\mathbf{c}$ sur Π sont telles que $\mathbf{b}'+\mathbf{c}'$ coincide avec la projection de $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ sur ce plan, *i.e.*

$$\mathbf{b}'+\mathbf{c}' = (\mathbf{b}+\mathbf{c})'$$

Les étapes 2 et 3 de la procédure décrite ci-dessus conduisent successivement à

$$\mathbf{b}''+\mathbf{c}'' = (\mathbf{b}+\mathbf{c})'' \qquad \text{et} \qquad \mathbf{b}'''+\mathbf{c}''' = (\mathbf{b}+\mathbf{c})'''$$

soit

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}+\mathbf{a}\wedge\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

ce qui démontre la distributivité à gauche.

Le raisonnement peut être aisément adapté pour démontrer (2.81).

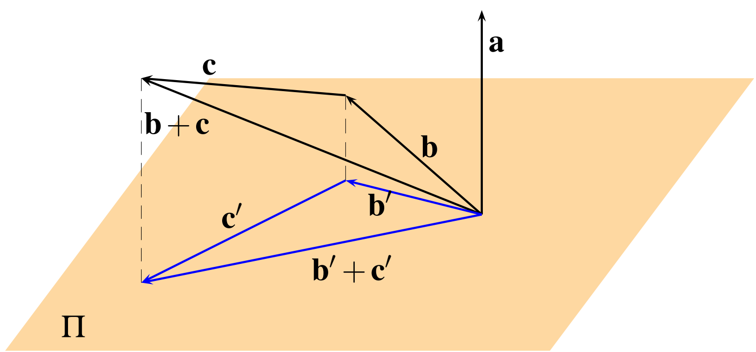


FIGURE 2.10

□

Si les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ forment une base orthonormée orientée dans le sens direct, on vérifie aisément que

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \tag{2.83}$$

En vertu de l'anti-commutativité du produit scalaire, on a également

$$\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \qquad \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \tag{2.84}$$

On peut aisément retenir ces résultats en remarquant que, si $i \neq j \neq k$,

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \pm \mathbf{e}_k \tag{2.85}$$

suivant que (i, j, k) est une permutation circulaire de $(1,2,3)$ ou de $(3,2,1)$. Par contre, le produit vectoriel s'annulant si les deux vecteurs sont parallèles, il vient

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \tag{2.86}$$

En travaillant dans la base orthonormée formée des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, et en exploitant la distributivité du produit scalaire, on calcule successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_1b_3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + a_2b_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &\qquad + a_2b_3\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + a_3b_2\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \end{aligned} \tag{2.87}$$

En injectant les résultats (2.83) et (2.84), on obtient le résultat suivant.

Dans toute base orthonormée,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \tag{2.88}$$

Formellement, l'expression (2.88) du produit vectoriel peut être écrite sous la forme du déterminant

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.89}$$

à développer selon la première ligne en exploitant la première loi des mineurs.

2.7.4 Double produit vectoriel.

Le produit vectoriel étant lui-même un vecteur, il peut être multiplié vectoriellement par un autre vecteur. Les expressions

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \tag{2.90}$$

sont appelées respectivement le *double produit vectoriel parenthèses avant* et le *double produit vectoriel parenthèses arrière*. En général, ces deux expressions ne sont pas identiques, *i.e.* le produit vectoriel n'est pas associatif.

En exploitant l'expression (2.88) du produit vectoriel et en vérifiant l'égalité des composantes des deux membres, on démontre que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \tag{2.91}$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \tag{2.92}$$

Pour retenir aisément ces formules, on notera que le double produit vectoriel peut être calculé en considérant le vecteur du milieu (qui est toujours un des deux vecteurs de la parenthèse) multiplié par le produit scalaire des deux autres vecteurs et en lui retranchant l'autre vecteur de la parenthèse multiplié par le produit scalaire des deux autres vecteurs.

2.7.5 Produit mixte.

L'expression

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \tag{2.93}$$

est appelée *produit mixte* des vecteurs **a**, **b** et **c**. Le produit mixte peut aussi être noté sous la forme $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

En exploitant la forme (2.89) du produit vectoriel, on montre aisément que le produit mixte peut être calculé en fonction des composantes des vecteurs dans une base orthonormée en évaluant

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.94}$$

Le déterminant étant invariant si on réalise une permutation circulaire de ses lignes, on déduit de (2.94) que le produit mixte de trois vecteurs est aussi inchangé pour toute permutation circulaire des trois vecteurs, *i.e.*

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \tag{2.95}$$

ou, de façon équivalente,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{2.96}$$

De même, en raison de l'anti-commutativité du produit vectoriel, on a, par exemple,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \tag{2.97}$$

Géométriquement, le produit mixte de trois vecteurs représente, au signe près, la mesure du volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs (Fig. 2.11). En effet, le produit mixte peut s'écrire sous la forme

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| \, \mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|} \tag{2.98}$$

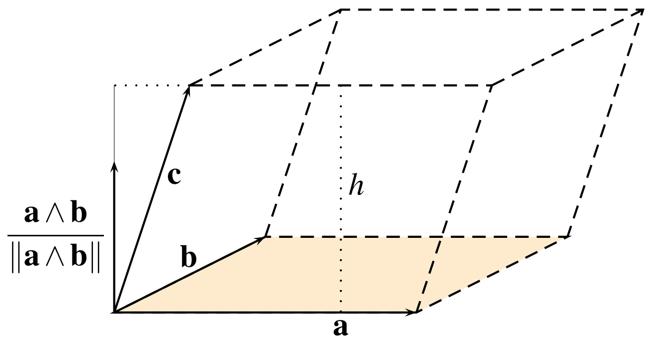


FIGURE 2.11

où $\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$ mesure l'aire du parallélogramme sur lequel s'appuie le parallélépipède et où la projection

$$\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|} = h \tag{2.99}$$

de $\mathbf{c}$ sur la normale à la base est égale, éventuellement au signe près, à la hauteur du parallélépipède.

Le produit mixte de trois vecteurs est nul si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

De l'expression (2.94), on déduit que produit mixte est nul si et seulement s'il existe une relation linéaire entre les lignes du déterminant formé des composantes des trois vecteurs. C'est le cas si et seulement si les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

$\square$

On déduit de cette proposition que tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ peut s'exprimer de façon unique comme combinaison linéaire d'un triplet de vecteurs dont le produit mixte est non nul puisque ceux-ci forment une base (pas nécessairement orthonormée ni constituée de vecteurs unitaires) de l'espace.