4.10.3 Décomposition en valeurs singulières.

Comme montré à la section 4.8.1, une matrice carrée d'ordre n peut être diagonalisée par une transformation de similitude si et seulement si elle possède n vecteurs propres linéairement indépendants. Une telle matrice peut alors être écrite sous la forme

$$\mathrm{A} = \mathrm{SDS}^{-1} \tag{4.104}$$

où D est une matrice diagonale. La limitation aux seules matrices possédant n vecteurs propres linéairement indépendants peut être levée à condition d'admettre l'utilisation simultanée de deux matrices qui, comme S, décrivent un changement de base. Une écriture semblable à (4.104) peut même alors être étendue aux matrices A rectangulaires. C'est ce que permet la décomposition en valeurs singulières, ou décomposition SVD (*Singular Value Decomposition*).

Les valeurs singulières permettent, d'une certaine façon, de généraliser la notion de valeur propre aux matrices non carrées.

Les *valeurs singulières* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ d'une matrice A quelconque sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ (ou de AA^*).

Pour comprendre le bien-fondé de cette définition, on peut remarquer que les matrices $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$ et AA^* sont toutes deux carrées. En effet, si A est de dimensions $m \times n$, alors les dimensions des deux produits sont, respectivement, $n \times n$ et $m \times m$. Par ailleurs, les deux matrices sont hermitiennes, *i.e.*

$$(\mathrm{A}^*\mathrm{A})^* = \mathrm{A}^*\mathrm{A}, \qquad (\mathrm{AA}^*)^* = \mathrm{AA}^*$$

et semi-définies positives puisque

$$x^*(A^*A)x = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{C}^n \tag{4.105}$$

$$y^*(AA^*)y = (A^*y)^*(A^*y) = \|A^*y\|^2 \geq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{C}^m \tag{4.106}$$

Dès lors, toutes les valeurs propres de A^*A et de AA^* sont réelles et positives ou nulles.

Enfin, si $\sigma^2 > 0$ est une valeur propre de A^*A relative au vecteur propre x, *i.e.* si

$$A^*Ax = \sigma^2 x \tag{4.107}$$

alors $Ax \neq 0$ (sinon on aurait $A^*Ax = 0$ et $\sigma = 0$) et

$$(AA^*)(Ax) = AA^*Ax = \sigma^2(Ax) \tag{4.108}$$

de sorte que Ax est un vecteur propre de AA^* relatif à la valeur propre σ^2. Un raisonnement semblable permet de montrer que toute valeur propre non nulle de AA^* est aussi une valeur propre de A^*A. Dès lors, les valeurs propres non nulles de A^*A et AA^* sont égales et possèdent la même multiplicité.

EXEMPLE 4.22 Considérons la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule aisément

$$A^*A = A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \{3, 1, 0\}$$

$$AA^* = AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \{3, 1\}$$

Comme démontré de façon générale, les matrices A^TA et AA^T sont symétriques semi-définies positives et leurs valeurs propres non nulles sont égales. Les valeurs singulières de A sont $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = 1$.

MATHEMATICA :
```
SingularValueList[{{1, 0, 1}, {0, 1, 1}}]
→   {√3, 1}
```

PYTHON :
```
A = np.array([[1, 0, 1], [0, 1, 1]])
np.linalg.svd(A, compute_uv=False)
→   array([1.7321, 1.])
```

MATLAB :
```
svd([1 0 1; 0 1 1])
→     1.7321
      1.0000
```

On notera que, comme dans l'exemple ci-dessus, les valeurs singulières sont généralement listées dans l'ordre décroissant.

Toute matrice A $(m \times n)$ admet une *décomposition en valeurs singulières* de la forme

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\Sigma\mathsf{V}^* \tag{4.109}$$

où U et V sont des matrices unitaires respectivement d'ordre m et d'ordre n et où Σ est une matrice $m \times n$ dont les seuls éléments non nuls sont $\Sigma_{ii} = \sigma_i$ $(i \in \{1,2,\dots,r\})$.

La démonstration est constructive, *i.e.* elle permet d'identifier la façon de construire les éléments de la décomposition SVD.

D'une part, par définition des valeurs singulières, les vecteurs propres v_i de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ sont tels que

$$\begin{cases} \mathsf{A}^*\mathsf{A}\,\mathsf{v}_i = \sigma_i^2\,\mathsf{v}_i, & i \in \{1,2,\dots,r\} \\ \mathsf{A}^*\mathsf{A}\,\mathsf{v}_i = 0, & i \in \{(r+1),\dots,n\} \end{cases}$$

Puisque $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ est hermitienne, ces vecteurs peuvent être choisis de façon à former une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ décrite par

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} \mathsf{v}_1 & \mathsf{v}_2 & \cdots & \mathsf{v}_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathsf{V}^*\mathsf{V} = \mathbb{I}_n$$

Notons que, puisque v_i est unitaire, on a

$$\|\mathsf{A}\mathsf{v}_i\|^2 = \mathsf{v}_i{}^*\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{v}_i = \sigma_i^2\mathsf{v}_i{}^*\mathsf{v}_i = \sigma_i^2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathsf{A}\mathsf{v}_i\| = \sigma_i, \qquad i \in \{1,2,\dots,r\} \tag{4.110}$$

et

$$\|\mathsf{A}\mathsf{v}_i\|^2 = \mathsf{v}_i{}^*\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{v}_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{A}\mathsf{v}_i = 0, \qquad i \in \{(r+1),\dots,n\} \tag{4.111}$$

D'autre part, les vecteurs propres u_i de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ sont tels que

$$\begin{cases} \mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{u}_i = \sigma_i^2\,\mathsf{u}_i, & i \in \{1,2,\dots,r\} \\ \mathsf{A}\mathsf{A}^*\mathsf{u}_i = 0, & i \in \{(r+1),\dots,m\} \end{cases}$$

Puisque $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ est hermitienne, les vecteurs u_i peuvent être choisis de façon à former une base orthonormée de $\mathbb{C}^m$ décrite par

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} \mathsf{u}_1 & \mathsf{u}_2 & \cdots & \mathsf{u}_m \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \mathsf{U}^*\mathsf{U} = \mathbb{I}_m$$

Le choix des vecteurs propres u_i peut être orienté de façon à vérifier les contraintes supplémentaires

$$\mathsf{A}\mathsf{v}_i = \sigma_i\,\mathsf{u}_i, \qquad i \in \{1,2,\dots,r\} \tag{4.112}$$

En effet, $\mathsf{A}\mathsf{v}_i/\sigma_i$ est unitaire, en vertu de (4.110), et est bien un vecteur propre de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ puisque

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*\left[\frac{\mathsf{A}\mathsf{v}_i}{\sigma_i}\right] = \mathsf{A}\frac{\mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{v}_i}{\sigma_i} = \mathsf{A}\frac{\sigma_i^2\mathsf{v}_i}{\sigma_i} = \sigma_i^2\left[\frac{\mathsf{A}\mathsf{v}_i}{\sigma_i}\right]$$

La base de $\mathbb{C}^m$ décrite par la matrice U peut donc être formée en considérant les r vecteurs propres $\mathsf{u}_i = \mathsf{A}\mathsf{v}_i/\sigma_i$ obtenus à partir des vecteurs propres de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ relatifs aux valeurs singulières et en complétant la base par $m - r$ vecteurs orthonormés appartenant au noyau de $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$.

La contrainte (4.112) et la relation (4.111) peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$\mathsf{AV} = \mathsf{A}\begin{pmatrix} \mathsf{v}_1 & \cdots & \mathsf{v}_r & \cdots & \mathsf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{u}_1 & \cdots & \mathsf{u}_r & \cdots & \mathsf{u}_m \end{pmatrix} \Sigma = \mathsf{U}\Sigma$$

où

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & 0_{(m-r)\times r} & & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

est de la forme annoncée dans l'énoncé. La matrice V étant unitaire, on obtient également

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\,\Sigma\,\mathsf{V}^*$$

□

Les vecteurs propres v de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ sont appelés les *vecteurs singuliers à droite* ou *vecteurs d'entrée*. Les vecteurs propres u de AA^* sont les *vecteurs singuliers à gauche* ou *vecteurs de sortie*.

La démonstration ci-dessus suggère que, pour déterminer une décomposition SVD d'une matrice A, il convient

i. de déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ et d'identifier ainsi les valeurs singulières et les vecteurs d'entrée formant les matrices Σ et V ;
ii. de déterminer les vecteurs de sorties $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \ldots, \mathsf{u}_r$ par la relation (4.112) ;
iii. si $r < m$, de compléter la matrice U au moyen de $m - r$ vecteurs unitaires orthogonaux choisis parmi les vecteurs propres de AA^* relatifs à la valeur propre nulle.

Exemple 4.23 Considérons à nouveau la matrice de l'exemple 4.22, *i.e.*

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a calculé précédemment

$$\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 3, 1 et 0. Dès lors,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres de $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ relatifs aux valeurs propres $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$ sont les multiples non nuls de, respectivement,

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En divisant ces vecteurs par leur norme, on forme les vecteurs d'entrée v_1, v_2 et v_3 ainsi que la matrice orthogonale

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La matrice A étant de dimensions 2×3, on peut déterminer les deux vecteurs de sortie u_1 et u_2 requis par application de (4.112), *i.e.*

$$\begin{cases} Av_1 = \sigma_1 u_1 = \sqrt{3}\, u_1 \\ \\ Av_2 = \sigma_2 u_2 = 1\, u_2 \end{cases}$$

soit

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Regroupant ces deux vecteurs de sortie, on forme la matrice orthogonale

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = U\,\Sigma\,V^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

MATHEMATICA :
```
A = {{1, 0, 1}, {0, 1, 1}};
{U, S, V} = SingularValueDecomposition[A]
→   { {{1/√2, -1/√2}, {1/√2, 1/√2}},
      {{√3,0,0},{0,1,0}},
      {{1/√6,-1/√2,-1/√3}, {1/√6,1/√2,-1/√3}, {2/√6,0,1/√3}}}
```

PYTHON [10]:
```
A = np.array([[1, 0, 1], [0, 1, 1]])
U, S, V = np.linalg.svd(A)
→   U = array([[0.7071, -0.7071], [0.7071, 0.7071]]),
    S = array([1.7321, 1. ]),
    V = array([[0.40825,0.40825,0.81650], [-0.70711,0.70711, 0.],
              [-0.57735,-0.57735, 0.57735]])
```

MATLAB [11]:
```
[U, S, V] = svd([1 0 1; 0 1 1])
→   U =  -0.7071   -0.7071      S =  1.7321        0   0
         -0.7071    0.7071                0   1.0000   0
→   V =  -0.4082   -0.7071   -0.5774
         -0.4082    0.7071   -0.5774
         -0.8165    0.0000    0.5774
```

10. On notera que Python ne fournit pas la matrice Σ mais la liste des valeurs singulières.
11. La decomposition SVD n'étant pas unique, on ne s'étonnera pas de la réponse différente fournie par Matlab.

Exemple 4.24 Déterminons une décomposition en valeurs singulières de la matrice réelle

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\mathsf{B}^*\mathsf{B} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres ont été calculées dans les exemples 4.22 et 4.23. Elle possède les valeurs propres $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 1$ et les vecteurs propres correspondants

$$\mathsf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ceux-ci permettent de former les matrices

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut déterminer deux des trois vecteurs de sortie par application de (4.112), *i.e.*

$$\begin{cases} \mathsf{B}\mathsf{v}_1 = \sigma_1 \mathsf{u}_1 = \sqrt{3}\,\mathsf{u}_1 \\ \mathsf{B}\mathsf{v}_2 = \sigma_2 \mathsf{u}_2 = 1\,\mathsf{u}_2 \end{cases}$$

$$\mathsf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathsf{B}\mathsf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{u}_2 = \mathsf{B}\mathsf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un troisième vecteur de sortie u_3 peut être recherché parmi les vecteurs propres de

$$\mathsf{B}\mathsf{B}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

relatifs à la valeur propre nulle. Exploitant les résultats de l'exemple précédent, on trouve, ayant soin de choisir un vecteur unitaire,

$$\mathsf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, il vient

$$\mathsf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{U}\,\Sigma\,\mathrm{V}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Évidemment, la décomposition SVD de B aurait pu être obtenue directement à partir de celle de la matrice A considérée à l'exemple 4.23 puisque $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$. En effet, si

$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\Sigma\mathrm{V}^{\mathrm{T}} \qquad \text{alors} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{V}\,\Sigma^{\mathrm{T}}\mathrm{U}^{\mathrm{T}}$$

Dès lors, une décomposition SVD de A^{T} peut être simplement obtenue à partir de celle de A en transposant Σ et en inversant les rôles joués par les matrices U et V, *i.e.* par les vecteurs d'entrée et de sortie.

La décomposition en valeurs singulières peut également être interprétée dans le cadre abstrait des espaces vectoriels. Comme indiqué à la section 3.3, la matrice A peut être associée aux composantes d'une application linéaire $\mathcal{A}$ d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ de dimension n vers un espace vectoriel $\mathtt{F}$ de dimension m pour un choix donné de bases de $\mathtt{E}$ et de $\mathtt{F}$. Dans ce cadre, la matrice Σ, qui possède les mêmes dimensions que A, est celle qui représente $\mathcal{A}$ lorsque la base de $\mathtt{E}$ est formée des vecteurs d'entrée et que la base de $\mathtt{F}$ est constituée des vecteurs de sortie [12]. C'est bien ce qui est exprimé par les relations

$$\begin{cases} \mathrm{Av}_i = \sigma_i \mathrm{u}_i & i \in \{1, 2, \ldots, r\} \\ \mathrm{Av}_i = 0 & i \in \{(r+1), \ldots, n\} \end{cases} \tag{4.113}$$

Par exemple, l'image du vecteur de base v_1 par l'application linéaire représentée par A est décrite par $\sigma_1 \mathrm{u}_1$ qui, dans la base de $\mathtt{F}$ constituée des vecteurs de sortie, a comme composantes

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice-colonne est bien celle qui forme la première colonne de Σ, conformément aux conclusions de la section 3.3. De même, l'image du vecteur de base v_{r+1} est le vecteur nul, dont les composantes dans la base formée des vecteurs de sortie sont nulles ; il y correspond une colonne d'éléments nuls dans la matrice Σ.

L'interprétation ci-dessus justifie les noms de vecteurs d'entrée et vecteurs de sortie introduits plus haut puisque les vecteurs d'entrée appartiennent à l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ sur lequel $\mathcal{A}$ est définie et que les vecteurs de sortie décrivent l'espace vectoriel des images. Dans ce cadre, les relations (4.113) permettent de caractériser l'application linéaire $\mathcal{A}$ par son action sur les vecteurs de $\mathtt{E}$, et plus particulièrement sur les vecteurs de base $\mathbf{v}_i$. Chacun des r premiers vecteurs d'entrée $\mathbf{v}_i$ est appliqué sur le vecteur de sortie $\mathbf{u}_i$ correspondant et sa norme est multipliée par la valeur singulière correspondante σ_i. Les vecteurs d'entrée $\mathbf{v}_{r+1}$ à $\mathbf{v}_n$ appartiennent au noyau de l'application linéaire et ont quant à eux une image nulle.

12. C'est-à-dire des vecteurs dont les composantes dans la base de $\mathtt{E}$ (resp. de $\mathtt{F}$) initialement utilisée pour décrire $\mathcal{A}$ sont les éléments $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$ (resp. $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_m$).

Plus généralement, si on décompose un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque de $\mathtt{E}$ en ses composantes dans la base orthonormée formée des vecteurs d'entrée $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, on a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i, \qquad \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{A}(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i x_i \mathbf{u}_i \tag{4.114}$$

i.e. l'image est produite en combinant les actions spécifiques correspondant à chacun des vecteurs d'entrée. Si on considère les vecteurs $\mathbf{x}$ unitaires dont les extrémités décrivent l'hyper-sphère unité centrée à l'origine et d'équation (dans le cas réel)

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{4.115}$$

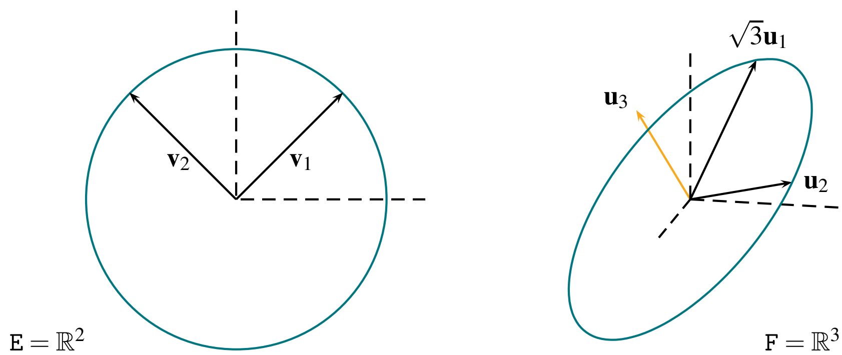
dans la base orthonormée formée des vecteurs d'entrée, les images correspondantes $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ décrivent dans $\mathtt{F}$ l'hyper-surface d'équation

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{y_p^2}{\sigma_p^2} = 1 \tag{4.116}$$

dans la base orthonormée de $\mathtt{F}$ formée des vecteurs de sortie. Cette surface est une hyper-ellipse du sous-espace constitué par les p premiers vecteurs de sortie, dont les axes sont orientés avec ceux-ci et dont les longueurs des demi-axes sont égales aux valeurs singulières correspondantes.

EXEMPLE 4.25 La décomposition en valeurs singulières de la matrice B introduite dans l'exemple (4.24) permet une interprétation graphique de l'application linéaire $\mathcal{B}$ que celle-ci représente.

Les vecteurs d'entrée $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ et les vecteurs de sortie $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ définissent des bases orthonormées des espaces $\mathtt{E} = \mathbb{R}^2$ et $\mathtt{F} = \mathbb{R}^3$ entre lesquels $\mathcal{B}$ est définie.



L'image par $\mathcal{B}$ du cercle unité tracé dans le plan d'origine est une ellipse dont les axes sont orientés selon $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ et les longueurs du demi-grand axe et du demi-petit axe sont respectivement $\sqrt{3}$ et 1. Le vecteur de sortie $\mathbf{u}_3$ est perpendiculaire au plan de l'ellipse. Ainsi donc, l'effet de $\mathcal{B}$ (et de B) est d'appliquer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sur $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ puis d'introduire des facteurs d'échelle $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = 1$ dans les directions correspondantes.

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice A met en évidence les différents sous-espaces vectoriels définis par A (et par l'application linéaire correspondante $\mathcal{A}$) représentés schématiquement sur la figure 4.1.

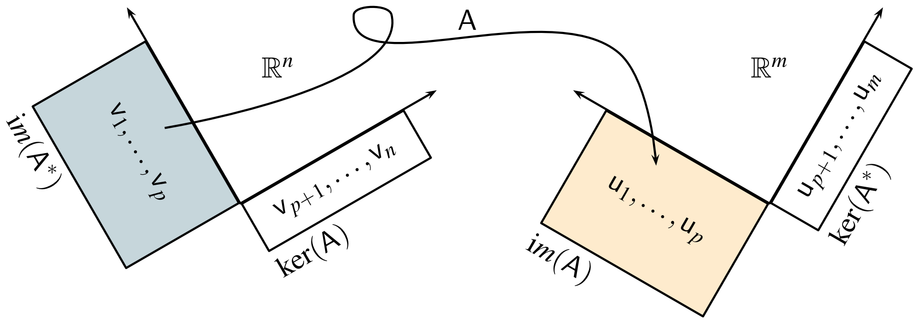


FIGURE 4.1: Sous-espaces associés à la décomposition SVD d'une matrice A.

- Les éléments $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_n$ décrivent une base orthonormée du noyau de A (et de $\mathcal{A}$) puisque, selon (4.111),
$$Av_i = 0 \qquad i \in \{(r+1), \ldots, n\} \tag{4.117}$$
et
$$Av_i = \sigma_i u_i \neq 0 \qquad i \in \{1, \ldots, r\} \tag{4.118}$$

- Les éléments $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m$ décrivent une base orthonormée du noyau de A^* (et de $\mathcal{A}^*$). En effet,
$$\|A^* u_i\|^2 = u_i{}^* AA^* u_i = 0 \qquad i \in \{(r+1), \ldots, m\} \tag{4.119}$$
de sorte que
$$A^* u_i = 0 \qquad i \in \{(r+1), \ldots, m\} \tag{4.120}$$
Par ailleurs, $A^* u_i \neq 0$ si $i \leq r$ puisque $AA^* u_i = \sigma_i u_i \neq 0$.

- Les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_r$ décrivent une base orthonormée de l'espace généré par les colonnes de A, *i.e.* de $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{im}(A)$ ou $\mathrm{im}(\mathcal{A})$. En effet, cet espace est décrit par
$$\{Av : v \in \mathbb{C}^n\} \tag{4.121}$$
Or, puisque les vecteurs d'entrée constituent une base de $\mathbb{C}^n$, tout élément v peut s'écrire sous la forme
$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad \text{où } \alpha_i \in \mathbb{C} \tag{4.122}$$
et, tenant compte de (4.111) et (4.112),
$$Av = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A v_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sigma_i u_i \tag{4.123}$$
L'espace décrit par Av est donc généré par les r premiers vecteurs de sortie.

- Les éléments $v_1, v_2, \ldots, v_r$ décrivent une base orthonormée de l'espace des colonnes de A^*, *i.e.* de $\mathrm{Col}(A^*) = \mathrm{im}(A^*)$ ou $\mathrm{im}(\mathcal{A}^*)$. Le raisonnement peut être mené comme ci-dessus en remarquant que (4.112) conduit à

$$\mathsf{A}^*(\sigma_i\,\mathsf{u}_i) = \mathsf{A}^*(\mathsf{A}\mathsf{v}_i) = \mathsf{A}^*\mathsf{A}\mathsf{v}_i = \sigma_i^2\mathsf{v}_i, \qquad i \in \{1,2,\dots,r\} \tag{4.124}$$

soit

$$\mathsf{A}^*\mathsf{u}_i = \sigma_i\mathsf{v}_i, \qquad i \in \{1,2,\dots,r\} \tag{4.125}$$

Dès lors, pour tout

$$\mathsf{u} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\mathsf{u}_i \qquad \text{où } \beta_i \in \mathbb{C} \tag{4.126}$$

on a, tenant compte de (4.120),

$$\mathsf{A}^*\mathsf{u} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\mathsf{A}^*\mathsf{u}_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\mathsf{A}^*\mathsf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\sigma_i\mathsf{u}_i \tag{4.127}$$

L'espace décrit par $\mathsf{A}^*\mathsf{u}$ est donc généré par les r premiers vecteurs d'entrée.

Cette analyse fournit plusieurs alternatives à la troisième étape de la procédure décrite à la page 146 pour générer les vecteurs de sortie $\mathsf{u}_{r+1},\dots,\mathsf{u}_m$ dans le cas où $r < m$.

- En vertu de (4.120), les vecteurs manquants peuvent être choisis parmi les vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux appartenant au noyau de A^* plutôt que parmi les vecteurs propres de AA^* relatifs à la valeur propre nulle.
- Dans la mesure où les vecteurs propres de AA^* relatifs à des valeurs propres distinctes sont mutuellement orthogonaux, les vecteurs de sortie $\mathsf{u}_{r+1},\dots,\mathsf{u}_m$ manquants peuvent être choisis de façon à former une base orthonormée du complément orthogonal de l'enveloppe linéaire des éléments $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_r$.
- La relation (4.125), symétrique de la relation (4.112), peut être utilisée pour inverser l'ordre dans lequel les matrices U et V sont générées. Ainsi, si $r < m$ on peut également procéder en deux étapes de la façon suivante :
  i. déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de AA^* et identifier ainsi les valeurs singulières et les vecteurs de sortie formant les matrices Σ et U ;
  ii. déterminer les vecteurs d'entrée $\mathsf{v}_1,\mathsf{v}_2,\dots,\mathsf{v}_r$ par la relation (4.125).

Exemple 4.26 Reprenons la matrice B considérée dans l'exemple 4.24.

Le troisième vecteur de sortie u_3 appartient au noyau de B^T puisque

$$\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et aurait pu être déterminé en exploitant cette propriété.

On peut également aisément constater que le vecteur u_3 est orthogonal aux éléments

$$\mathsf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permettrait également de déterminer u_3.

Enfin, il est également possible de déterminer une décomposition SVD de B en deux étapes en commençant par l'identification des vecteurs de sortie à partir de l'étude des vecteurs propres de

$$\mathsf{B}\mathsf{B}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$ et peuvent être associées aux vecteurs propres normés

$$\mathsf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On identifie dès lors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ensuite, par application de (4.125), il vient

$$\mathsf{v}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathsf{B}^{\mathrm{T}}\mathsf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{v}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathsf{B}^{\mathrm{T}}\mathsf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathsf{V} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Approximation de rang réduit.

En développant la décomposition en valeurs singulières d'une matrice A quelconque, on peut écrire

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{u}_1 & \cdots & \mathsf{u}_r & \cdots & \mathsf{u}_m \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0_{r\times(n-r)} \\ 0 & & \sigma_r & \\ \hline & 0_{(m-r)\times r} & & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathsf{v}_1^* \\ \vdots \\ \mathsf{v}_r^* \\ \vdots \\ \mathsf{v}_n^* \end{pmatrix} \tag{4.128}$$

soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{u}_1 & \cdots & \mathsf{u}_r & \cdots & \mathsf{u}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \mathsf{v}_1^* \\ \vdots \\ \sigma_r \mathsf{v}_r^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \mathsf{u}_1 \mathsf{v}_1^* + \cdots + \sigma_r \mathsf{u}_r \mathsf{v}_r^* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathsf{u}_i \mathsf{v}_i^* \tag{4.129}$$

Cette expression fait clairement apparaître que les éléments porteurs d'information permettant de reconstruire la matrice A sont les valeurs singulières et les r premiers vecteurs d'entrée et de sortie.

EXEMPLE 4.27 À partir de la décomposition SVD de la matrice A établie dans l'exemple 4.23, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \sigma_1 \mathsf{u}_1 \mathsf{v}_1{}^* + \sigma_2 \mathsf{u}_2 \mathsf{v}_2{}^* \\
&= \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Chacun des termes $\sigma_i \mathsf{u}_i \mathsf{v}_i^*$ de la décomposition en valeurs singulière représente une matrice de rang 1 puisque toutes les colonnes sont des multiples de u_i. Par ailleurs, puisque les vecteurs d'entrée et de sortie sont normés, l'importance relative des différents monômes composant A est caractérisée par la valeur singulière correspondante. Celles-ci étant rangées par ordre décroissant, les termes successifs de la somme apparaissant dans le membre de droite de (4.129) apportent une information de moins en moins significative. Cette propriété est utilisée dans de nombreuses méthodes d'analyse de données ou de traitement du signal pour réduire la quantité d'information sans perdre les éléments les plus pertinents. En effet, une représentation approchée de A peut être générée en limitant la somme dans (4.129) aux $p < r$ premiers termes, *i.e.*

$$\mathsf{A} \approx \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \mathsf{u}_i \mathsf{v}_i^* \tag{4.130}$$

Cette approximation est de rang $p < r$ et est dès lors désignée sous le nom *d'approximation de rang réduit* (*low-rank approximation*). Dans le cas où $p \ll r$, cette approche est utile pour compacter l'information disponible dans A sans perdre l'essentiel du signal.

EXEMPLE 4.28 Le logo ci-dessous peut être stocké dans une matrice de dimensions 240×210 dont chacun des éléments représente l'intensité, mesurée sur une échelle de 0 à 255, du pixel correspondant de l'image bitmap en noir et blanc.

La décomposition SVD fait apparaître 210 valeurs singulières et autant de vecteurs d'entrée et de sortie correspondants à introduire dans la décomposition (4.129) pour obtenir une représentation exacte de l'image.

Aux représentations approchées (4.130) de la matrice obtenue en ne retenant qu'un nombre limité de termes correspondent des représentations plus ou moins fidèles du logo.

$p = 1$

$p = 10$

$p = 20$

$p = 50$

L'approximation de rang réduit construite à partir de la décomposition SVD d'une matrice est optimale par rapport à la *norme spectrale* définie par

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\|\mathsf{A}\mathsf{x}\|_2}{\|\mathsf{x}\|_2} = \max_{\|\mathsf{x}\|_2=1} \|\mathsf{A}\mathsf{x}\|_2 \tag{4.131}$$

Avant de préciser ce résultat en énonçant le théorème correspondant, on peut noter que les valeurs singulières d'un matrice A sont intimement liées à la norme spectrale de celle-ci.

Pour tout matrice A de dimensions $m \times n$, on a

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \sigma_1 \tag{4.132}$$

où σ_1 désigne la plus grande des valeurs singulières de A.

En effet,

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|=1} x^* A^* Ax$$

En exploitant le résultat de la section 4.9.3 sur le maximum des formes quadratiques et hermitiennes, on sait que le maximum ci-dessus est égal à la plus grande des valeurs propres de A^*A. Puisque les valeurs propres de A^*A sont les carrés des valeurs singulières de A, il vient

$$\|A\|_2^2 = \sigma_1^2$$

□

EXEMPLE 4.29 Reprenons l'exemple 2.8 du calcul de la norme spectrale de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule aisément

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

soit $\{3,\ 1\}$. Dès lors, on a $\|A\|_2 = \sqrt{3}$ comme calculé précédemment.

Le théorème suivant affirme que, parmi toutes les approximations de rang p d'une matrice A, celle formée en tronquant la SVD est celle qui est la plus proche de A au sens de la norme spectrale.

Soit une matrice A de dimensions $m \times n$ et de rang r et

$$A_p = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i {v_i}^*$$

son approximation de rang $p \leq r$ obtenue en limitant la décomposition SVD de A à ses p plus grandes valeurs singulières. On a

$$\min_{\rho(X)=p} \|A - X\|_2 = \|A - A_p\|_2 = \sigma_{p+1} \tag{4.133}$$

Remarquons d'abord que

$$A - A_p = \sum_{k=p+1}^{r} \sigma_i u_i {v_i}^*$$

ce qui fournit la décomposition en valeurs singulières de $A - A_p$. En vertu de (4.132), on a donc $\|A - A_p\| = \sigma_{p+1}$.

Pour montrer que A_p est optimale, considérons une matrice X quelconque de dimensions $m \times n$ et de rang p. Par le théorème du rang, on sait que la dimension du noyau de X est $(n - p)$. On en déduit que l'intersection entre $\ker(X)$ et l'enveloppe linéaire des $p+1$ vecteurs propres d'entrée $v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1}$ ne peut être nulle puisque la somme $(n-p)+(p+1) = n+1$ des dimensions de ces deux espaces est strictement supérieure à n. On peut donc trouver un élément non nul $w \in \ker(X)$ tel que

$$w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_{p+1} v_{p+1}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que w est unitaire, ce qui se traduit par

$$\|w\|^2 = 1 = \sum_{i=1}^{p+1} |\gamma_i|^2$$

Il vient dès lors

$$\begin{aligned} \|A - X\|_2^2 \ &\geq \ \|(A - X)w\|_2^2 \ = \ \|Aw\|_2^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{p+1} A\,\gamma_i\,v_i \right\|_2^2 \ = \ \left\| \sum_{i=1}^{p+1} \gamma_i\,\sigma_i\,u_i \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} |\gamma_i|^2\,\sigma_i^2 \geq \sigma_{p+1}^2 \end{aligned}$$

où on a tenu compte de (4.112) et du fait que les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_{p+1}$ sont orthonormés.

□

Décomposition SVD des matrices hermitiennes.

Dans le cas d'une matrice A hermitienne, les valeurs singulières sont égales aux valeurs absolues des valeurs propres de A. En effet, si x_i est un vecteur propre unitaire de A relatif à la valeur propre $\lambda_i \neq 0$ alors

$$A^* A x_i = \lambda_i A^* x_i = \lambda_i A x_i = \lambda_i^2 x_i \tag{4.134}$$

de sorte que $\sigma_i = |\lambda_i|$ est une valeur singulière de A et x_i est un vecteur d'entrée correspondant. Il leur correspond un vecteur de sortie tel que

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A x_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \tag{4.135}$$

Éventuellement au signe près, les vecteurs d'entrée sont donc égaux aux vecteurs de sortie. Dans le cas particulier où A est hermitienne semi-définie positive, l'égalité est complète : $\sigma_i = \lambda_i$ et $u_i = v_i$.

La décomposition SVD d'une matrice hermitienne A prend la forme particulière suivante :

DÉCOMPOSITION SPECTRALE
Toute matrice hermitienne A peut être écrite sous la forme

$$A = \lambda_1\, x_1 {x_1}^* + \lambda_2\, x_2 {x_2}^* + \cdots + \lambda_r\, x_r {x_r}^* \tag{4.136}$$

en fonction de ses valeurs propres non nulles λ_1, λ_2,...λ_r et des vecteurs propres unitaires mutuellement orthogonaux correspondants $x_1, x_2, \dots x_r$.

Cette expression est identique à celle pouvant être obtenue à partir de l'expression de la diagonalisation de A par une transformation de similitude. On sait en effet que les vecteurs propres de A peuvent être choisis unitaires et mutuellement orthogonaux lorsque A est hermitienne et que

$$A = SDS^{-1} \tag{4.137}$$

où

$$D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \tag{4.138}$$

et où la matrice

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \tag{4.139}$$

est unitaire de sorte que $S^{-1} = S^*$. Dès lors, on a

$$A = SDS^* \tag{4.140}$$

Si on excepte la présence d'éventuelles valeurs propres négatives sur la diagonale de D, cette expression est semblable à une décomposition en valeurs singulières de A. En évaluant les produits matriciels dans (4.140) on retrouve la décomposition spectrale (4.136).

EXEMPLE 4.30 Considérons la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres et vecteurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 = 3, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 1, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} A = SDS^T &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
