Une norme sur un espace vectoriel $\mathtt{E}$ est une application qui, à tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathtt{E}$ associe un nombre réel $\|\mathbf{a}\|$ tel que

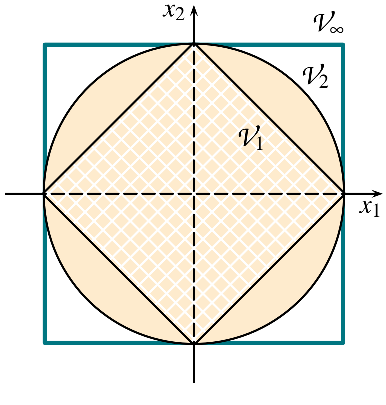
i. la norme est définie positive :
$$\|\mathbf{a}\| \geq 0 \tag{2.45}$$
l'égalité ayant lieu si et seulement si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;

ii. la norme est linéaire :
$$\|\alpha\mathbf{a}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{a}\| \tag{2.46}$$
pour tout scalaire α ;

iii. la norme satisfait à l'inégalité triangulaire :
$$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\| \tag{2.47}$$

Dans $\mathbb{C}^n$, on pourra par exemple introduire les normes
$$\|\mathsf{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \tag{2.48}$$
ou
$$\|\mathsf{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \tag{2.49}$$
ou encore
$$\|\mathsf{a}\|_\infty = \max_{i\in\{1\dots n\}} |a_i| \tag{2.50}$$
et choisir de travailler avec l'une ou l'autre norme selon les besoins théoriques ou la facilité d'évaluation de la norme. La norme euclidienne introduite précédemment en (2.33) correspond à la norme $\|\cdot\|_2$.

Exemple 2.7 Dans $\mathbb{R}^2$, intéressons-nous aux voisinages de l'origine définis par
$$\mathcal{V}_p = \left\{\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathsf{x}\|_p \leq 1\right\}$$
en utilisant différentes normes.



Pour différentes valeurs de p, on a
$$\mathcal{V}_1 = \left\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\right\}$$
$$\mathcal{V}_2 = \left\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$$
$$\mathcal{V}_\infty = \left\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2 : \max(|x_1|, |x_2|) \leq 1\right\}$$

Ces voisinages correspondant à différentes façons de mesurer la distance à l'origine sont représentés dans la figure ci-contre.

2.6.2 Norme d'une matrice.

La notion de norme d'un vecteur peut naturellement être étendue aux matrices puisque les matrices de dimensions données forment un espace vectoriel.

La base naturelle de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n^m$ des matrices complexes $m \times n$ est formée des $m \cdot n$ matrices élémentaires E_{ij} peuplées uniquement de zéros sauf pour l'élément ij égal à 1, *i.e.* les matrices du type

$$\mathsf{E}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Toute matrice A s'exprime en effet naturellement et de façon unique en fonction des matrices élémentaires E_{ij} sous la forme

$$\mathsf{A} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathsf{E}_{ij} \tag{2.52}$$

Si on définit le produit scalaire de telle façon que

$$(\mathsf{E}_{ij} | \mathsf{E}_{kl}) = \delta_{ik} \delta_{jl} \tag{2.53}$$

c'est-à-dire si on considère que les matrices élémentaires sont orthonormées, alors le produit scalaire de deux matrices quelconques est entièrement défini et est donné par

$$\begin{aligned} (\mathsf{A}|\mathsf{B}) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathsf{E}_{ij} | \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \mathsf{E}_{kl} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ij} \overline{b}_{kl} (\mathsf{E}_{ij} | \mathsf{E}_{kl}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b}_{ij} \\ &= \operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{B}^*) = \operatorname{trace}(\mathsf{B}^*\mathsf{A}) \end{aligned} \tag{2.54}$$

La norme correspondant à cette définition du produit scalaire est appelée *norme de Frobenius* et est donnée par

$$\|\mathsf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathsf{A}\mathsf{A}^*)} \tag{2.55}$$

Cette norme correspond à la norme euclidienne habituelle $\| \cdot \|_2$ avec laquelle elle se confond complètement si on réorganise les éléments de la matrice de dimensions $m \times n$ en une matrice-colonne de $m \cdot n$ éléments. Elle possède donc toutes les propriétés (2.45)-(2.47) attendues d'une norme.

Bien que la norme de Frobenius soit très utilisée, d'autres approches sont envisageables, en particulier, lorsqu'il s'agit de combiner la norme de matrices avec celle d'éléments de $\mathbb{C}^n$.

La *norme spectrale* d'une matrice $A \in \mathbb{C}_n^m$ est définie à partir de la norme euclidienne par

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \in \mathbb{C}^n : \|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \tag{2.56}$$

L'équivalence des deux expressions ci-dessus de $\|A\|_2$ résulte de la linéarité de la norme vectorielle. En effet, tout élément $x \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $x = \beta x_0$ où $\|x_0\|_2 = 1$ et $\beta = \|x\|_2 > 0$. Dès lors

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\beta\, \|Ax_0\|_2}{\beta\, \|x_0\|_2} = \frac{\|Ax_0\|_2}{\|x_0\|_2} = \|Ax_0\|_2$$

ce qui permet d'évaluer la norme spectrale en considérant les seuls vecteurs unitaires x_0.

La définition (2.56) vérifie les propriétés générales des normes (2.45)-(2.47).

- On vérifie aisément que $\|A\|_2 \geq 0$ quelle que soit $A \in \mathbb{C}_n^m$ et que $\|0\|_2 = 0$.
  Si $\|A\|_2 = 0$, on a $Ax = 0$ quel que soit $x \neq 0$. Dès lors, en identifiant x successivement à $e_1, e_2, \ldots, e_n$ il vient $A = 0$.
- Quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on a

$$\|\alpha A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|\alpha Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \neq 0} \frac{|\alpha|\, \|Ax\|_2}{\|x\|_2} = |\alpha| \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = |\alpha|\, \|A\|_2$$

  en vertu de la linéarité de la norme euclidienne.
- Pour toutes matrices A et $B \in \mathbb{C}_n^m$ on a

$$\begin{aligned} \|A+B\|_2 &= \max_{x \neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_2}{\|x\|_2} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax+Bx\|_2}{\|x\|_2} \\ &\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2}{\|x\|_2} \\ &\leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} + \max_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2 + \|B\|_2 \end{aligned}$$

  en vertu de l'inégalité triangulaire vérifiée par la norme euclidienne. □

Comme le montre l'exemple 2.8, le calcul pratique de la norme spectrale par application de la définition est loin d'être aisé, même dans un cas simple. Les développements de la section 4.10.3 permettent cependant de relier la norme spectrale au concept de valeurs singulières qui sera développé dans la suite, ce qui permet de simplifier considérablement le calcul. Par ailleurs, les normes matricielles sont essentiellement utilisées dans le cadre de développements théoriques, de sorte que les difficultés du calcul pratique ne sont pas très importantes par rapport aux propriétés générales développées plus loin.

EXEMPLE 2.8 Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule aisément $\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = 2$.

Le calcul de la norme spectrale par application directe de la définition est par contre bien plus ardu. On calcule successivement

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\|\mathsf{Ax}\|_2}{\|\mathsf{x}\|_2} = \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\sqrt{2(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2)}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \max_y \sqrt{\frac{2(1+y^2-y)}{1+y^2}} = \sqrt{2} \max_y \sqrt{1 - \frac{y}{1+y^2}}$$

où on a posé $y = x_2/x_1$. Le maximum de la fonction de y intervenant dans cette expression étant obtenu pour $y = -1$, on obtient $\|\mathsf{A}\|_2 = \sqrt{3}$.

MATHEMATICA : `A={{1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}; Norm[A, "Frobenius"], Norm[A]`
→ 2; $\sqrt{3}$

PYTHON : `A=[[1, -1],[0, 1],[1, 0]]; [np.linalg.norm(A), np.linalg.norm(A, 2)]`
→ `[2.0, 1.7321]`

MATLAB : `A=([1 -1; 0 1; 1 0]); [norm(A,'fro') norm(A)]`
→ `2.0000 1.7321`

D'après la définition (2.56) de la norme spectrale, on a

$$\forall \mathsf{x} \in \mathbb{C}^n \quad : \quad \|\mathsf{Ax}\|_2 \leq \|\mathsf{A}\|_2 \, \|\mathsf{x}\|_2 \tag{2.57}$$

Cette inégalité se généralise au produit deux matrices.

La norme spectrale est *sous-multiplicative*, *i.e.*

$$\forall \mathsf{A} \in \mathbb{C}_n^m,\ \mathsf{B} \in \mathbb{C}_p^n, \qquad \|\mathsf{AB}\|_2 \leq \|\mathsf{A}\|_2 \, \|\mathsf{B}\|_2 \tag{2.58}$$

On a successivement

$$\|\mathsf{AB}\|_2 = \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\|\mathsf{AB\,x}\|_2}{\|\mathsf{x}\|_2} \leq \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\|\mathsf{A}\|_2 \|\mathsf{B\,x}\|_2}{\|\mathsf{x}\|_2} = \|\mathsf{A}\|_2 \max_{\mathsf{x}\neq 0} \frac{\|\mathsf{B\,x}\|_2}{\|\mathsf{x}\|_2} = \|\mathsf{A}\|_2 \|\,\mathsf{B}\|_2$$

par définition de la norme spectrale et par application de (2.57) à $\|\mathsf{Ay}\|_2$ où $\mathsf{y} = \mathsf{Bx}$.

□

La procédure utilisée dans (2.56) pour définir la norme spectrale à partir de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ peut être appliquée en utilisant toute autre norme, par exemple les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ introduites dans la section 2.6.1. La norme ainsi définie est dite *induite* ou *subordonnée* à la norme vectorielle. On peut ainsi introduire les normes

$$\|\mathsf{A}\|_1 = \max_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \tag{2.59}$$

$$\|\mathsf{A}\|_\infty = \max_{i\in\{1,2,\ldots,m\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{2.60}$$

qui correspondent respectivement à la plus grande valeur de la somme des modules des éléments des colonnes ou des lignes de A. On peut vérifier que ces définitions sont licites et conduisent à des normes sous-multiplicative en suivant un raisonnement identique à celui appliqué plus haut.