Chapitre 6

Exercices.

6.1 Nombres complexes.

1) Évaluez les expressions suivantes en donnant la forme algébrique des nombres complexes :

a) $(1+i)(1-2i)$ — Rép. : $3-i$

b) $(4-3i)\overline{(2+i)}$ — Rép. : $5-10i$

c) $\dfrac{1-3i}{1-i}$ — Rép. : $2-i$

d) $\dfrac{4-3i}{3-4i}$ — Rép. : $\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}i$

e) $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$ — Rép. : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

f) $(2+2i)^{1/2}$ — Rép. : $2^{3/4}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$

g) $|1-i|$ — Rép. : $\sqrt{2}$

h) $\left|\dfrac{(2-i)(1+i)}{3-i}\right|$ — Rép. : 1

i) e^{i^3} — Rép. : $\cos 1 - i\sin 1$

j) $2e^{-i\pi/4}$ — Rép. : $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

k) $e^{2i\pi/3}$ — Rép. : $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) Exprimez les nombres complexes suivant sous forme trigonométrique.

a) $-2i$ — Rép. : $2e^{3i\pi/2}$

b) $1-i$ — Rép. : $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

c) $\sqrt{3}-i$ Rép. : $2\,e^{-i\pi/6}$

d) -4 Rép. : $4\,e^{i\pi}$

3) Calculez toutes les racines troisièmes de l'unité.

Rép. : $1, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}$

4) Calculez toutes les racines quatrièmes de -4.

Rép. : $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}, \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}, \sqrt{2}\,e^{3i\pi/4}, \sqrt{2}\,e^{-3i\pi/4}$

5) Calculez toutes les racines cinquièmes de $1+i$.

Rép. : $\sqrt[10]{2}\,e^{i\pi/20},\ \sqrt[10]{2}\,e^{9i\pi/20},\ \sqrt[10]{2}\,e^{17i\pi/20},\ \sqrt[10]{2}\,e^{-15i\pi/20},\ \sqrt[10]{2}\,e^{-7i\pi/20}$

6) Les paramètres ω, α et t étant réels, montrez que les expressions suivantes sont réelles et exprimez-les comme telles.

a) $e^{(\alpha+i\omega)t} + e^{(\alpha-i\omega)t}$ Rép. : $2\,e^{\alpha t}\cos\omega t$

b) $i\left[e^{(-\alpha+i\omega)t} - e^{(-\alpha-i\omega)t}\right]$ Rép. : $-2\,e^{-\alpha t}\sin\omega t$

7) Déterminez les zéros des polynômes ci-dessous en précisant la multiplicité de ceux-ci.

a) x^3+4x^2+6x+4 Rép. : $-2\ (\times 1),\ -1-i\ (\times 1),\ -1+i\ (\times 1)$

b) $2x^4-4x^3+5x^2-6x+3$ Rép. : $1\ (\times 2),\ i\sqrt{3/2}\ (\times 1),\ -i\sqrt{3/2}\ (\times 1)$

c) $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ Rép. : $1-i\ (\times 2),\ 1+i\ (\times 2)$

d) $x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4$ Rép. : $1\ (\times 1),\ i\sqrt{2}\ (\times 2),\ -i\sqrt{2}\ (\times 2)$

8) En utilisant le formalisme de l'exponentielle imaginaire, démontrez les formules de trigonométrie relatives à $\sin(\theta+\varphi)$ et $\cos(\theta+\varphi)$.

9) En utilisant le formalisme de l'exponentielle imaginaire, démontrez les formules de trigonométrie relatives à $\sin(\theta-\varphi)$ et $\cos(\theta-\varphi)$.

10) Montrez que si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et si on note $\theta = \arg(z)$, alors

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta \qquad \text{et} \qquad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$$

11) Montrez que

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

et déduisez-en la valeur de $\cos\pi/8$. Rép. : $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$

12) On note les racines n-èmes de l'unité sous la forme $z_0, z_1, \dots z_{n-1}$.
    a) Montrez que les racines vérifient la relation

$$z_k = z_1^k, \qquad k \in \{0,\ 1,\ \dots,\ n-1\}$$

    b) Montrez que

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

    c) Montrez que

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1}$$

13) En partant de la la formule du binôme de Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

    a) montrez que, si $n = 2m$,

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \cdots + (-1)^m C_n^n = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$$

    b) montrez que

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta) = 2^n \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^n \cos \frac{n\theta}{2}$$

14) Déterminez le lieu des points du plan complexe qui vérifient la relation

$$z - c = \rho \frac{1+it}{1-it} \qquad (c \in \mathbb{C},\ \rho \in \mathbb{R})$$

où t est un paramètre réel variant dans $]-\infty, \infty[$.

Rép. : Cercle de centre c et de rayon ρ.

6.2 Calcul matriciel.

6.2.1 Algèbre matricielle.

1) Calculez les produits matriciels suivants :
    a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ Rép. : 8

e) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2i\\0 & i & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2i\\0 & i & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ Rép. : $\begin{pmatrix}-3 & 2i\\2i & 0\\6i & 3\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1 & 1\\i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\i & -i\end{pmatrix}^{*}$ Rép. : $\begin{pmatrix}1 & 0\\i & 2\end{pmatrix}$

2) On considère les matrices

$$\mathsf{T}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

a) Montrez que $\mathsf{T}(\theta_1)\mathsf{T}(\theta_2)=\mathsf{T}(\theta_1+\theta_2)=\mathsf{T}(\theta_2)\mathsf{T}(\theta_1)$.

b) Sous quelle condition a-t-on $\mathsf{T}^n(\theta)=\mathbb{I}$? Rép. : $n\theta=2\pi$

3) Précisez les tailles des matrices A, B et C permettant de former l'expression $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})$ et montrez dans ce cas, en repartant des définitions, que

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})=\mathsf{AB}+\mathsf{AC}$$

4) En repartant des définitions en fonction des éléments des matrices, démontrez la formule

$$(\mathsf{AB})^*=\mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$$

Précisez les tailles des matrices pour lesquelles cette formule est applicable.

5) Soit une matrice $\mathsf{A}\in\mathbb{R}^n_n$ et deux matrices colonnes u et v appartenant à $\mathbb{R}^n$. Montrez que

$$\operatorname{trace}(\mathsf{A}+\mathsf{u}\mathsf{v}^{\mathrm{T}})=\operatorname{trace}(\mathsf{A})+\mathsf{v}^{\mathrm{T}}\mathsf{u}$$

6) Montrez que, pour toutes matrices A et B carrées d'ordre n,

$$\operatorname{trace}(\mathsf{AB})=\operatorname{trace}(\mathsf{BA})$$

7) Si a et b désignent deux matrices colonnes à n composantes, montrez que

$$\operatorname{trace}(\mathsf{a}\mathsf{b}^{\mathrm{T}})=\mathsf{a}^{\mathrm{T}}\mathsf{b}$$

8) Montrez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

9) Si A et B désignent des matrices carrées quelconques de même ordre, les égalités suivantes sont-elles vérifiées ? Justifiez.

   a) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2 = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{AB} + \mathrm{B}^2$? — Rép. : Faux

   b) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$? — Rép. : Faux

   c) $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$? — Rép. : Vrai

   d) $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}^{\mathrm{T}}$? — Rép. : Faux

10) Montrez que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11) Déterminez la forme générale des matrices réelles qui commutent avec la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Rép. : $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathbb{R}$

6.2.2 Forme normale échelonnée et rang.

1) Déterminez une forme normale échelonnée des matrices suivantes :

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 9 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/7 \\ 0 & 1 & 0 & -4/7 \\ 0 & 0 & 1 & -10/7 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/9 \\ 0 & 1 & -26/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Déterminez le rang des matrices suivantes :

   a) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & c & b & a \\ -c & 0 & a & b \\ -b & -a & 0 & c \\ -a & -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ où $b \neq 0, a^2 + b^2 = c^2$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$,

Rép. : $4 \text{ si } a \neq 0,\ 2 \text{ si } a = 0$

b) $A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ Rép. : 2

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ Rép. : 2 si $\alpha = 3,\ 4$ sinon

6.2.3 Calcul des déterminants.

1) Calculez les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}$ Rép. : 116

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ Rép. : -7

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$ Rép. : -18

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ Rép. : 0

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Rép. : 14

f) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ Rép. : 96

g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Rép. : -1

2) Évaluez les déterminants suivants :

a) $\begin{vmatrix} gc & ge & a+ge & gb+ge \\ 0 & b & b & b \\ c & e & e & b+e \\ a & b & b+f & b+d \end{vmatrix}$ Rép. : $ab(ab-cd)$

b) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ -\alpha+\beta+\gamma & \alpha-\beta+\gamma & \alpha+\beta-\gamma \end{vmatrix}$ Rép. : $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$

c) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$ Rép. : $1+x_1+x_2+\cdots+x_n$

3) Résolvez les équations suivantes :

a) $\begin{vmatrix} x & a & a & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = 0$ Rép. : $x = a, b$ ou c

b) $\begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x-3 \\ x+3 & x & x+5 \\ x-2 & x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ Rép. : $x = -1$

4) Soit une matrice carrée A d'ordre n et C la matrice des cofacteurs. Montrez que, si A est singulière, alors $AC^T = 0$.

6.2.4 Inverse d'une matrice.

1) Calculez l'inverse (si elle existe) des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ Rép. : n'existe pas

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} (1+i)/2 & 0 \\ 0 & (1-i)/2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

Rép. : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1+i & -i \\ -1-i & -1+i & 1 \\ -1+i & 1+i & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Rép. : $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

Rép. : $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha\beta & \alpha\beta\gamma \\ 0 & 1 & \beta & \beta\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Rép. : $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Soient les matrices
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$
où $\lambda \neq \mu$. Déterminez les valeurs de λ et μ pour que $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{AB}$ soit diagonale.

Rép. : $\lambda = -1$ et $\mu = 2$ ou $\lambda = 2$ et $\mu = -1$

3) Montrez que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est encore une matrice triangulaire supérieure.

4) Soient les matrices
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) En exploitant ces deux matrices, montrez que $\mathrm{AB} = 0$ n'implique pas que A ou B soit égale à la matrice nulle.

b) Dans le cas général, montrez que $\mathrm{AB} = 0$ implique qu'une des deux matrices A ou B au moins est singulière.

5) Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ soit non singulière.
Dans le cas où cette condition est rencontrée, calculez A^{-1}.

Rép. : $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \neq 0,\ \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$

6) Soient une matrice A de dimensions $n \times m$ et une matrice B de dimensions $m \times n$. Montrez que la matrice AB de dimensions $n \times n$ n'est pas inversible si $n > m$.

6.2.5 Matrices spéciales.

1) Les matrices A et B définies par

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathsf{B} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont-elles réelles ? diagonales ? symétriques ? anti-symétriques ? singulières ? orthogonales ? hermitiennes ? anti-hermitiennes ? unitaires ? normales ?

Rép. : A : singulière, hermitienne et normale
B : réelle, orthogonale et normale

2) Les matrices

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

permettent de décrire le changement des coordonnées d'un point P lorsque l'on fait subir aux axes orthogonaux de référence des rotations d'angle α, β et γ autour de chacun d'entre eux.

Montrez que la combinaison des trois rotations, décrite par le produit matriciel ABC, est représentée par une matrice orthogonale.

3) La matrice

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & Q_x \\ I_{xy} & I_y & Q_y \\ Q_x & Q_y & A \end{pmatrix}$$

intervient dans l'analyse de structure d'une arche. Si

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -Q_x/A \\ 0 & 1 & -Q_y/A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

déterminez $\mathsf{E} = \mathsf{B}\mathsf{F}\mathsf{B}^{\mathsf{T}}$ et montrer que E est une matrice symétrique.

4) Montrez que le déterminant d'une matrice anti-symétrique d'ordre impair est nul. Qu'en est-il pour une matrice anti-symétrique d'ordre pair ?

5) Montrez que

   a) si A est hermitienne et U est unitaire, alors $\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ est hermitienne,

   b) si A est anti-hermitienne alors iA est hermitienne,

   c) le produit de deux matrices hermitiennes A et B est hermitien si et seulement si A et B commutent,

   d) si S est anti-symétrique alors $\mathsf{A} = (\mathbb{I} - \mathsf{S})(\mathbb{I} + \mathsf{S})^{-1}$ est orthogonale.

6) Montrez que la matrice
$$\mathsf{H}_u = \mathbb{I}_n - 2\frac{1}{u^T u} u u^T$$
est orthogonale pour tout u non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$.

7) On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
où α, β et γ sont des paramètres réels. Déterminez la(les) condition(s) sur ces paramètres pour que

a) A soit diagonale ; Rép. : $\alpha = \gamma = 0$

b) A soit triangulaire ; Rép. : $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$

c) A soit symétrique ; Rép. : $\alpha = \gamma$

d) A soit anti-symétrique ; Rép. : $\alpha = -\gamma$ et $\beta = 0$

e) A^2 soit un multiple de $\mathbb{I}$. Rép. : $\alpha\gamma = \beta^2$

6.2.6 Opérations matricielles par bloc.

1) Si A est une matrice orthogonale d'ordre n, montrez que
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
est une matrice orthogonale.

2) Soit
$$A = \begin{pmatrix} x+\lambda & x & \dots & \dots & x \\ x & x+\lambda & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & x+\lambda & x \\ x & x & \dots & x & x+\lambda \end{pmatrix}$$

a) Montrez que $\det A = \lambda^{n-1}(nx+\lambda)$ si A est d'ordre n.

b) Montrez que A^{-1} est d'une forme semblable à celle de A (si A est inversible).

3) Soient deux matrices colonnes u et v appartenant à $\mathbb{R}^n$.

a) Montrez qu'il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ w^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} + uv^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & u \\ 0 & 1 + v^T u \end{pmatrix}$$

b) Montrez que

$$\det(\mathbb{I}+\mathsf{u}\mathsf{v}^{\mathrm{T}}) = 1+\mathsf{v}^{\mathrm{T}}\mathsf{u}$$

c) Du point précédent, déduisez que, pour toute matrice inversible $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^n_n$, on a

$$\det(\mathsf{A}+\mathsf{u}\mathsf{v}^{\mathrm{T}}) = (\det \mathsf{A})\ \ (1+\mathsf{v}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{u})$$

6.3 Espace vectoriel.

6.3.1 Indépendance linéaire.

1) Déterminez si les vecteurs dont les composantes sont données par les matrices-colonnes ci-dessous sont linéairement indépendants :

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ Rép. : oui

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Rép. : oui

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Rép. : oui

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. : non

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$ Rép. : non

2) Déterminez si les éléments suivants sont linéairement indépendants :

a) x, x^2-x, x^3-x où $x \in \mathbb{R}$ Rép. : oui

b) $2x, x^3-3, 1+x-4x^3, x^3+18x-9$ où $x \in \mathbb{R}$ Rép. : non

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ Rép. : non

3) Pour quelle(s) valeur(s) de α les vecteurs dont les composantes sont données par

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement indépendants? Rép. : Aucune

4) Soient trois vecteurs non nuls $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ mutuellement orthogonaux. Montrez que les trois vecteurs sont linéairement indépendants.

5) Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont linéairement indépendants, en est-il de même des vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ et $\mathbf{c}+\mathbf{a}$? Justifiez

Rép. : Oui.

6) Si les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sont linéairement indépendants, en est-il de même des vecteurs

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{m},\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{m},\ \mathbf{a}_3 - \mathbf{m} \qquad \text{où} \qquad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{3} \quad ?$$

Rép. : Non.

7) Soient deux fonctions f et g dérivables sur $[0,1]$. Montrez que ces deux fonctions sont linéairement indépendantes sur $[0,1]$ si le Wronskien

$$W(f,g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur } [0,1]$$

6.3.2 Sous-espaces vectoriels et dimensions.

1) Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. Lesquels des ensembles suivant sont eux-mêmes des sous-espaces vectoriels de E? Justifiez.

   a) $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathrm{E}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{E}_2\}$

   b) $\mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathrm{E}_1 \quad \text{ou} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{E}_2\}$

   c) $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \ : \ \mathbf{x}_1 \in \mathrm{E}_1, \quad \mathbf{x}_2 \in \mathrm{E}_2\}$

Rép. : $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$ sont des sous-espaces vectoriels.

2) Déterminez la dimension de l'espace vectoriel des matrices diagonales d'ordre n.

Rép. : n

3) Démontrez que, quels que soient les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a toujours

$$\dim(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2) + \dim(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2$$

4) Montrez que si E' et E'' sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}''$ et $\dim \mathrm{E}' = \dim \mathrm{E}'' = n$ fini, alors $\mathrm{E}' = \mathrm{E}''$.

6.3.3 Vecteurs et géométrie.

1) On donne les vecteurs libres

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, l'angle $\theta \in [0,\pi]$ entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ et $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{21}$, $\theta = \arccos(15/7\sqrt{6})$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = 10\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -6$

2) On donne les vecteurs libres

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, l'angle $\theta \in [0,\pi]$ entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ et $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}$, $\theta = \arccos(3/2\sqrt{7})$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -4$

3) Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ si

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 6,\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$

4) Montrez que, $\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\right)$$

5) Calculez $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ dans le cas où $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$.

Rép. : 0

6) Montrez que, $\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{E}$,

$$\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

7) Montrez que (identités de Jacobi)

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} + (\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge\mathbf{a} + (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) + \mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) + \mathbf{c}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

8) Montrez que (identité de Lagrange)

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

9) Si $\mathbf{e}$ est un vecteur unitaire, montrez que, pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})\mathbf{e} + \mathbf{e}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{e})$$

Interprétez géométriquement cette relation.

10) Montrez que l'équation vectorielle

$$\mathbf{x}\wedge\mathbf{a} = \mathbf{b} \qquad \text{où} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

possède une solution $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ si et seulement si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.
Si cette condition est remplie, montrez que toutes les solutions s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2} + \lambda\mathbf{a}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

11) Montrez que si le produit mixte de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$ est non nul, alors tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x} = \frac{\big[\mathbf{x}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\big]\mathbf{a} + \big[\mathbf{x}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\big]\mathbf{b} + \big[\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\big]\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})}$$

12) Montrez que la distance d d'un point P à la droite passant par le point P_0 et de direction $\mathbf{a}$ est donnée par

$$d = \frac{\|\mathbf{PP_0}\wedge\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}$$

13) Les vecteurs $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ forment une *base réciproque* de la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ de $\mathcal{E}$ si

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}'_j = \delta_{ij}, \qquad i, j \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

a) Montrez que si les vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ forment une base orthonormée alors cette base est réciproque d'elle-même.

b) Dans le cas général, montrez que les vecteurs

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3}, \qquad \mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3}, \qquad \mathbf{e}'_3 = \frac{\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3}$$

forment une base réciproque de la base des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

c) Montrez que tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$ peut être exprimé sous la forme

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}'_1)\ \mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}'_2)\ \mathbf{e}_2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}'_3)\ \mathbf{e}_3$$

d) Montrez que si $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ forment une *base réciproque* de la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ alors

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \frac{1}{[\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3]}$$

14) Simplifiez l'expression suivante dans laquelle $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ désignent des vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathcal{E}$,

$$\big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}+\mathbf{b})\big]\wedge\mathbf{a}$$

Rép. : $2\,\mathbf{b}$

15) Montrez que, $\forall \mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$, le produit mixte des vecteurs $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ et $\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}$ est égal au carré du produit mixte de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, c'est-à-dire

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$$

16) Soit $\mathbf{a}$ un vecteur libre non nul de l'espace physique $\mathcal{E}$. Caractérisez géométriquement tous les vecteurs $\mathbf{x}$ tels que

$$\big[(\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{x}\big] \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Rép. : $\mathbf{x}$ perpendiculaire ou parallèle à $\mathbf{a}$

6.3.4 Orthonormation.

1) Déterminez une base orthonormée de l'enveloppe linéaire des vecteurs suivants :

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8/15 \\ -4/15 \\ 8/15 \\ 9/15 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ -4i \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$

2) Soit une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ et les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_2 = i\mathbf{e}_1 + \ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_3 = (1+i)\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

a) Déterminez la dimension du sous-espace vectoriel $\mathtt{F}$ généré par les vecteurs $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$.

Rép. : $\dim \mathtt{F} = 2$

b) Déterminez une base orthonormée de $\mathtt{F}$.

Rép. :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big[\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3\Big] \\ \mathbf{z}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\Big[(-1+2i)\mathbf{e}_1 + (2-i)\mathbf{e}_2 + (1-i)\mathbf{e}_3\Big] \end{cases}$$

6.4 Application linéaire.

6.4.1 Rang, noyau et image.

1) Déterminez l'image, le rang et le noyau des applications linéaires suivantes :

a) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -x+y \end{pmatrix}$

Rép. : $\mathbb{R}^2; \rho(\mathcal{A}) = 2; \{\mathbf{0}\}$

b) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$

Rép. : $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : 5a-b-2c = 0 \right\}; \rho(\mathcal{A}) = 2; \{\mathbf{0}\}$

c) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+2z \\ 3x+y+4z \\ 5x-y+8z \end{pmatrix}$

Rép. : $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : 2a+b-c=0 \right\}; \rho(\mathcal{A}) = 2; \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : \mathcal{A}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w+x-y+2z \\ 3w+y+4z \\ 6w+x+6z \end{pmatrix}$

Rép. : $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a+b-c = 0 \right\}; \rho(\mathcal{A}) = 2; \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

e) $\mathcal{A} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 : \mathcal{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy \\ (1+i)y-x \end{pmatrix}$ Rép. : $\mathbb{C}^2; \rho(\mathcal{A}) = 2; \{\mathbf{0}\}$

2) Soit la matrice

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & 2 & 3-i \\ 2-i & 3+i & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifiez que H est hermitienne. Déterminez le rang et le noyau de l'application linéaire représentée par H. Rép. : rang 3; noyau $= \{\mathbf{0}\}$

3) Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire quelconque définie sur un espace vectoriel $\mathtt{E}$ et $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ des vecteurs de $\mathtt{E}$. Montrez que si $\mathcal{A}(\mathbf{x_1}), \mathcal{A}(\mathbf{x_2}), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{x_k})$ sont linéairement indépendants, alors

$$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + \cdots + \mathbf{x_k} \neq \mathbf{0}$$

4) Soit $\mathtt{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension k d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ de dimension $n > k$ muni d'un produit scalaire. Soit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k$ une base orthonormée particulière de $\mathtt{F}$. On considère l'application linéaire $\mathcal{P}^{\mathrm{F}}$ de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{E}$ définie par

$$\mathbf{x} \in \mathrm{E} \mapsto \mathcal{P}^{\mathrm{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$$

- Déterminez aussi complètement que possible $\ker \mathcal{P}^{\mathrm{F}}$.

  Rép. : $\mathtt{F}^{\perp}$
- Déterminez le rang de $\mathcal{P}^{\mathrm{F}}$.

  Rép. : k
- Si les vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ de $\mathtt{E}$ sont linéairement indépendants, en est-il de même de $\mathcal{P}^{\mathrm{F}}(\mathbf{x}_1), \mathcal{P}^{\mathrm{F}}(\mathbf{x}_2), \ldots, \mathcal{P}^{\mathrm{F}}(\mathbf{x}_p)$? Justifiez.

  Rép. : Non
- Déterminez les composantes de $\mathcal{P}^{\mathrm{F}}$ dans une base orthonormée de votre choix.
- Montrez que la définition de $\mathcal{P}^{\mathrm{F}}$ ne dépend pas de la base orthonormée considérée dans $\mathtt{F}$, plus spécifiquement, montrez que si les vecteurs $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots \mathbf{e}'_k$ forment une base orthonormée quelconque de $\mathtt{F}$, alors

$$\forall \mathbf{x} \in \mathrm{E}, \quad \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}|\mathbf{e}'_i)\mathbf{e}'_i$$

6.4.2 Problèmes linéaires.

1) Résolvez les systèmes linéaires suivants et discutez en fonction des paramètres éventuels :

a) $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$ Rép. : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x = b(y+z) \\ x = 2a(y-z) \\ x = (6a-b)y-(6a+b)z \end{cases}$

Rép. : Si $b \neq 4a$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (4ab)/(4a-b) \\ (4a+b)/(4a-b) \\ 1 \end{pmatrix}$;

si $b = 4a \neq 0$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

si $b = 4a = 0$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+2y+4z = \eta \\ x+4y+10z = \eta^2 \end{cases}$

Rép. : Si $\eta = 1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

si $\eta = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

si $\eta \neq 1$ et $\eta \neq 2$: incompatible.

d) $\begin{cases} w+x-y+z = 4 \\ 2w+3x-3y+3z = 11 \\ -w+x = 1 \\ 2w+3x-y+2z = 13 \end{cases}$

Rép. : $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} x_1+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_2+x_3-2x_4-x_5+2x_6 = 0 \\ -3x_1-3x_3-x_4-x_5-2x_6 = 0 \\ -x_1-x_3-x_6 = 0 \end{cases}$

Rép. : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+2x_4 = 3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+6x_4 = 9 \\ 3x_1-2x_2+4x_3+8x_4 = 12 \\ x_1+2x_3+4x_4 = 6 \end{cases}$

Rép. : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{cases} \lambda x+y+z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$

Rép. : Si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{(2+\lambda)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
si $\lambda = -2$, incompatible;
Si $\lambda = 1$,
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{cases} x+ay=a^2 \\ ax+y+z=1+a \\ x+ay+2z=3 \\ ax+y+3z=a \end{cases}$

Rép. : Si $a^2 \neq 4$, incompatible;
si $a = 2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;
si $a = -2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Soit un ensemble de $n+1$ points (x_i, y_i) avec $i \in \{0, \ldots, n\}$. Montrez qu'on peut faire passer un polynôme d'ordre n
$$\hat{y}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
par ces points quelles que soient les ordonnées y_i si et seulement si $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

3) On veut ajuster une cubique $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ à des points expérimentaux $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), d_1 = f'(x_1), d_2 = f'(x_2)$.
Montrez qu'il est possible de construire cette interpolation quels que soient y_1, y_2, d_1 et d_2 si et seulement si $x_1 \neq x_2$.

4) Dans un problème de mécanique des fluides, on sait que 5 paramètres sont impliqués : la vitesse v, la densité ρ, la distance D, l'accélération de pesanteur g et la viscosité μ.
La vitesse peut être interprétée comme une longueur L divisée par un temps T, ce qui se note $[v] = L\,T^{-1}$. On dit que $L\,T^{-1}$ représente les dimensions de v. De même, on a, si M désigne la masse,
$$[\rho] = M\,L^{-3} \quad ; \quad [g] = L\,T^{-2}$$
$$[D] = L \quad ; \quad [\mu] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$$
On recherche les valeurs de p, q, r, s et t telles que
$$[v^p \rho^q D^r g^s \mu^t] = 1 = M^0 L^0 T^0$$

Montrez qu'on ne peut trouver que deux produits $v^p \rho^q D^r g^s \mu^t$ indépendants et que ceux-ci peuvent être choisis tels que :

- Re = Nombre de Reynolds = $\dfrac{v\rho D}{\mu}$
- Fr = Nombre de Froude = $\dfrac{Dg}{v^2}$

6.5 Valeurs propres et vecteurs propres.

1) Calculez les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Rép. : $\lambda_1 = 3, x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -4, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Rép. : $\lambda_1 = 0, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Rép. : $\lambda_1 = 1$ (double), $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 10, x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Rép. : $\lambda_1 = 1, x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{15}, x = \alpha \begin{pmatrix} -5 - \sqrt{15} \\ 2 + \sqrt{15} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3 + \sqrt{15}, x = \alpha \begin{pmatrix} -5 + \sqrt{15} \\ 2 - \sqrt{15} \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Rép. : $\lambda_1 = 2$ (double), $x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 1, x = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad b \neq 0$

Rép. : $\lambda = a \text{ (quadruple)}; \; x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $bc \neq 0$

Rép. : $\lambda = a$ (quadruple); $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $bcd \neq 0$

Rép. : $\lambda = a$ (quadruple); $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où α et β sont des nombres complexes non nuls.

Rép. : $\lambda_1 = 1; x_1 = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\lambda_2 = 1 + \sqrt{\alpha\beta}, x_2 = k \begin{pmatrix} \frac{+\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 1 - \sqrt{\alpha\beta}, x_3 = k \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Déterminez les conditions pour que

- les valeurs propres soient réelles,

Rép. : $\alpha\beta \geq 0$.

- les vecteurs propres soient orthogonaux.

Rép. : $|\alpha| = |\beta|$

Montrez que les deux conditions sont satisfaites simultanément seulement si A est hermitienne.

3) En un point donné d'un milieu continu, l'état de déformation est représenté, dans un repère orthogonal particulier, par la matrice

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminez les directions de l'espace selon lesquelles la déformation se réduit à une élongation (ou une contraction) sans cisaillement, c'est-à-dire les directions $\mathbf{n}$ telles que

$$\varepsilon n = \lambda n$$

où λ est une constante représentant le taux d'élongation dans cette direction.

Rép. : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

4) La déformation y d'une colonne soumise à une charge P est donnée par

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0 \quad ; \quad y(0) = y(L) = 0$$

Cette équation peut être résolue numériquement en remplaçant l'équation différentielle par

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \frac{PL^2}{16EI}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

où y_1, y_2 et y_3 désignent les approximations de $y(L/4), y(L/2)$ et $y(3L/4)$.
Déterminez la charge critique $\tilde{P}$ la plus faible capable de déformer cette colonne et comparez celle-ci avec la valeur exacte obtenue par résolution analytique, soit

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Rép. : $\tilde{P} = 16(2-\sqrt{2})\frac{EI}{L^2} < P$

5) L'application linéaire décrite par la relation $\mathsf{y} = \mathsf{A}\mathsf{x}$ où

$$\mathsf{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8 & -1 & -4\\4 & 4 & 7\\1 & -8 & 4\end{pmatrix}$$

transforme le point de coordonnées x en un point de coordonnées y.
Déterminez les points fixes de cette transformation, c'est-à-dire ceux qui sont appliqués sur eux-mêmes.

Rép. : $\alpha\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$

6) Une matrice A carrée d'ordre n est dite *idempotente* lorsque $\mathsf{A}^2 = \mathsf{A}$.

a) Montrez que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice A symétrique soit idempotente est que toutes ses valeurs propres soient égales à 0 ou à 1.

b) Montrez qu'alors le rang $\rho(\mathsf{A})$ de A est égal à la trace de A et que A est définie positive si $\rho(\mathsf{A}) = n$ et semi-définie positive si $\rho(\mathsf{A}) < n$.

7) Une matrice de probabilité est une matrice telle que
   - tous les éléments sont ≥ 0,
   - la somme des éléments d'une ligne est égale à 1.

   Montrez que le produit de deux matrices de probabilité est encore une matrice de probabilité.

   Montrez aussi que toute matrice de probabilité admet 1 comme valeur propre.

8) Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, montrez que les valeurs propres de $\mathsf{A} - \alpha\mathbb{I}$ sont données par $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots, \lambda_n - \alpha$.

9) Si on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, montrez que $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ sont des valeurs propres de A^2 .

10) Soit

$$\mathsf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A} = \alpha\, \mathsf{x}\, \mathsf{x}^{\mathrm{T}}$$

   où $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $\mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{x} = 1$ et $\alpha \neq 0$.

   a) Déterminez le rang de A.

   Rép. : $\rho(\mathsf{A}) = 1$

   b) Montrez que A possède n vecteurs propres mutuellement orthogonaux.

   c) Montrez que l'on peut exprimer aisément un des vecteurs propres en fonction des données du problème.

   Rép. : x est un vecteur propre relatif à α

   d) Montrez comment on peut obtenir les $n-1$ autres vecteurs propres.

   Rép. : Les vecteurs de base du complément orthogonal de x sont des vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 0$

11) L'état de contrainte au sein d'un solide est décrit par le tenseur des tensions $\boldsymbol{\sigma}$ qui, dans une base orthonormée particulière composées des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, est représenté par la matrice

$$\Sigma = \sigma_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   où σ_0 désigne une constante strictement positive. La force par unité de surface qui s'exerce sur une surface de normale $\mathbf{n}$ est donnée par $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. On dit qu'on est dans un état de traction pure lorsque $\mathbf{t} = \alpha\mathbf{n}$ avec $\alpha > 0$.

   Parmi les différentes surfaces soumises à un état de traction pure, déterminez l'orientation de celle sur laquelle s'exerce la force par unité de surface la plus grande. Que vaut cette force maximale ?

   Rép. : $\|\mathbf{t}_{max}\| = 3\sigma_0$ pour $\mathbf{n} = (2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)/3$

12) Dans un matériau magnétique, l'aimantation, mesurée par le vecteur aimantation $\mathbf{M}$, dépend de l'orientation du champ magnétique $\mathbf{H}$ appliqué. Lorsque le matériau est linéaire, on peut relier $\mathbf{M}$ à $\mathbf{H}$ par le biais d'une application linéaire χ tel que $\mathbf{M} = \chi(\mathbf{H})$. Si χ est représentée par la matrice

$$\mathsf{X} = \chi_0 \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(où $\chi_0 > 0$ est une constante strictement positive) dans la base constituée des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, déterminez la direction du champ magnétique $\mathbf{H}$ à appliquer pour induire un vecteur aimantation $\mathbf{M}$ parallèle à $\mathbf{H}$ de norme aussi petite que possible pour une intensité donnée $\|\mathbf{H}\|$ du champ magnétique.

Rép. : $\mathbf{H}$ parallèle à $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)/\sqrt{2}$

13) Foufou le mouton en peluche passe ses journées entre trois endroits : la chambre, le bureau et le salon. Ses journées sont rythmées d'heure en heure par les mouvements suivants.
   - Quand il dort dans la chambre, il a 9 chances sur 10 de rester dans la chambre pour l'heure suivante. Quand il se réveille, il y a une chance sur deux qu'il aille devant la télévision dans le salon et une chance sur deux d'aller travailler dans le bureau avec son maître.
   - Il se lasse très vite du travail; après une heure, il doit aller faire autre chose. Après avoir travaillé, il y a 3 chances sur 10 pour qu'il se dirige vers le salon et 7 chances sur 10 de retourner dormir dans sa chambre.
   - Il est peu passionné par la télévision; il y a 8 chances sur 10 pour qu'il aille dormir dans sa chambre après une heure. Sinon, il reste devant la télévision.

   On désigne par $c^{(n)}$, $b^{(n)}$, et $s^{(n)}$, respectivement, les probabilités que Foufou se trouve dans la chambre, dans le bureau et dans le salon pendant l'heure n. En fonction de la nature de ces variables on a $c^{(n)} + b^{(n)} + s^{(n)} = 1$.

   a) Montrez que les mouvements de Foufou heure après heure peuvent être décrits par la matrice de transition T telle que

$$\mathsf{x}^{(n)} = \mathsf{T}\mathsf{x}^{(n-1)} \qquad \text{où} \qquad \mathsf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} c^{(n)} \\ b^{(n)} \\ s^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{T} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Montrez qu'il existe une distribution de probabilité stationnaire $\mathsf{x}^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{x}^{(n)}$ et déterminez la probabilité de trouver Foufou dans sa chambre pour $n \to \infty$.

   Rép. : $160/181$

6.6 Diagonalisation.

1) Diagonalisez, si possible, les matrices suivantes en précisant la matrice de transformation :

   a) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

   Rép. : $\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $S = \begin{pmatrix} -3i-1 & 3i-1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Rép. : pas diagonalisable

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Rép. : pas diagonalisable

f) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Rép. : $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-i & 2+i \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

2) Si A et B sont diagonalisables, montrez que $AB = BA$ si A et B possèdent les mêmes vecteurs propres.

3) Si A et B sont diagonalisables par une même matrice, montrez que les valeurs propres de $A + B$ peuvent être écrites comme la somme de valeurs propres de A et de B.

4) Si A et B sont diagonalisables par une même matrice, montrer que les valeurs propres de AB peuvent être écrites comme le produit de valeurs propres de A et de B.

5) Le tenseur **K** de conductibilité thermique décrit les propriétés de diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Dans un repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ donné, le tenseur admet la représentation matricielle

$$K = k_0 \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

où k_0 est une constante strictement positive. Dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, les composantes du vecteur flux de chaleur $\mathbf{J}$ (quantité d'énergie s'écoulant par unité de temps et de surface) sont reliées à celles du gradient de température ∇T par la relation

$$J = -K\nabla T$$

a) Déterminez les directions **e** de l'espace telles que des variations de température selon **e**, *i.e.* telles que $\nabla T = \alpha \mathbf{e}$, n'induisent de flux de chaleur que selon **e**.

Rép. : Toute direction $\mathbf{e}$ dans le plan défini par
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \text{ ou selon } \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) Écrivez l'expression matricielle de **K** dans une base orthonormée dont les vecteurs de base coïncident avec des directions particulières déterminées au point précédent ainsi que la matrice orthogonale S décrivant le changement de base correspondant.

$$\text{Rép. : } \mathsf{S}^{\mathrm{T}}\mathsf{KS} = k_0\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&9\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathsf{S} = \begin{pmatrix}\mathsf{x}_1 & \mathsf{x}_2 & \mathsf{x}_3\end{pmatrix}$$

6) On considère une entreprise constituée de trois départements A, B et C. Chaque année, les ouvriers actifs dans un département sont invités à changer de département de sorte que
$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\\0.5&0.5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = \mathsf{A}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$$
où a_n, b_n et c_n désignent le nombre d'ouvriers dans chacun des départements pendant l'année n.

a) Montrez que A peut s'écrire sous la forme $\mathsf{A} = \mathsf{S}\ \mathsf{D}\ \mathsf{S}^{-1}$ où D désigne une matrice diagonale et S une matrice orthogonale. Déterminez S et D.

$$\text{Rép. : } \mathsf{S} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\ \mathsf{D} = \mathrm{diag}\,(1, -1/2, -1/2)$$

b) Montrez que $\mathsf{A}^n = \mathsf{S}\ \mathsf{D}'\ \mathsf{S}^{-1}$ où D′ est une nouvelle matrice diagonale à déterminer.

$$\text{Rép. : } \mathsf{D}' = \mathrm{diag}\,(1^n, (-1/2)^n, (-1/2)^n)$$

c) Montrez que, pour n tendant vers l'infini, les trois départements emploieront chacun le tiers du personnel total de l'usine quelle que soit la répartition initiale du personnel entre les trois départements.

6.7 Formes quadratiques.

1) Montrez que $\mathsf{B}^{\mathrm{T}}\mathsf{B}$ est défini positif si B est une matrice réelle non singulière.

2) Soit $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^n_n$ une matrice symétrique définie négative et $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$ une matrice colonne. Montrez que l'expression
$$Q(\mathsf{x}) = \mathsf{x}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\mathsf{x} - 2\mathsf{b}^{\mathrm{T}}\mathsf{x}$$
est maximale si $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$.

Suggestion : exprimez x *sous la forme* $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{b} + \mathsf{y}$ *où* $\mathsf{y} \in \mathbb{R}^n$.

3) En un point P d'une structure métallique, la matrice représentant le tenseur des déformations dans une base orthonormée $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ donnée est

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon > 0$ désigne une constante.
Le taux de déformation (d'étirement ou de contraction) d'un élément de matière orienté dans la direction du vecteur unitaire **n** est donné par

$$\Delta = \mathsf{n}^{\mathrm{T}} \varepsilon\, \mathsf{n}$$

où n désigne la matrice-colonne des composantes de $\mathbf{n}$ dans la base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
Déterminez la (les) direction(s) $\mathbf{n}$ correspondant au taux de déformation maximum.

Rép. : $\mathsf{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathsf{n}^{\mathrm{T}} \varepsilon\, \mathsf{n} = 6\varepsilon_0$

4) Le moment d'inertie d'un corps solide en rotation autour d'un axe de direction $\mathbf{e}$ ($\|\mathbf{e}\| = 1$) est donné par

$$J_e = (\mathcal{A}(\mathbf{e})|\mathbf{e})$$

où $\mathcal{A}$ est une application linéaire. Dans une base orthonormée particulière, cette expression prend la forme

$$J_e = \mathsf{e}^{\mathrm{T}} \mathsf{A}\, \mathsf{e}$$

où e et A désignent respectivement les composantes de $\mathbf{e}$ et de $\mathcal{A}$ dans la base choisie.
Si

$$\mathsf{A} = mR^2 \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

où m et R sont des constantes, déterminez les directions correspondant aux moments d'inertie maximum et minimum. Déterminez les moments d'inertie correspondants.

Rép. : $\mathsf{d}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, J_1 = 2mR^2; \mathsf{d}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, J_2 = 7mR^2$

5) Réduisez les coniques suivantes à leur forme canonique

a) $8x^2 + 8y^2 - 6xy = 110$, Rép. : $\frac{X^2}{10} + \frac{Y^2}{22} = 1$

b) $5x^2 + 11y^2 + 5z^2 - 10yz + 2xz - 10xy = 4$, Rép. : $\frac{X^2}{4} + Y^2 + 4Z^2 = 1$

c) $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 20yz - 20xz + 20xy = 3$ Rép. : $9X^2 - Y^2 - Z^2 = 1$

6) Montrez que la norme spectrale d'une matrice A définie par (2.56) est telle que

$$\|\mathsf{A}\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(\mathsf{A}^*\mathsf{A})}$$

où $\lambda_i(\mathsf{A}^*\mathsf{A})$ désigne les valeurs propres de la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$.

6.8 Décomposition en valeurs singulières et pseudo-inverse.

1) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   a) Calculez le rang de A.

   Rép. : 1

   b) Calculez les valeurs singulières de A.

   Rép. : $\{5\}$

   c) Déterminez une décomposition SVD de A.

   Rép. : $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculez le rang de A.

   Rép. : 1

   b) Calculez les valeurs singulières de A.

   Rép. : $\{\sqrt{10}\}$

   c) Déterminez une décomposition SVD de A.

   Rép. : $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculez le rang de A.

   Rép. : 1

   b) Calculez les valeurs singulières de A.

   Rép. : $\{\sqrt{2}\}$

   c) Déterminez une décomposition SVD de A.

   Rép. : $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calculez le rang de A.

   Rép. : 2

   b) Calculez les valeurs singulières de A.

   Rép. : $\{\sqrt{3},\ 1\}$

   c) Déterminez une décomposition SVD de A.

   Rép. : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

5) Déterminez la pseudo-inverse des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Rép. : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4/5 & 0 \end{pmatrix}$ Rép. : $\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Montrez que la norme de Frobenius (2.55) d'une matrice A de rang r est telle que

$$\|\mathsf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}$$

6.9 Exercices de synthèse.

1) Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$, son aimantation éventuelle peut être décrite par le moment dipolaire magnétique par unité de volume $\mathbf{M}$ (plus simplement appelé 'vecteur aimantation'). Si on excepte le cas des matériaux ferromagnétiques qui présentent une aimantation permanente, le vecteur $\mathbf{M}$ est relié à $\mathbf{H}$ par une loi du type $\mathbf{M} = \mathcal{X}(\mathbf{H})$ où $\mathcal{X}$ désigne une application linéaire. Dans les matériaux paramagnétiques, on a $(\mathbf{M}|\mathbf{H}) > 0$ pour tout $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$. Dans les matériaux diamagnétiques, par contre, l'aimantation réduit le champ magnétique, *i.e.* $(\mathbf{M}|\mathbf{H}) < 0$ pour tout $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$.

Dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, on détermine les composantes de $\mathcal{X}$ sous la forme

$$\mathsf{X} = \chi_0 \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & \sqrt{2}\,\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & -\sqrt{2}\,\alpha \\ \sqrt{2}\,\alpha & -\sqrt{2}\,\alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}$$

où $\chi_0 > 0$ et α sont des constantes réelles.

a) Déterminez toutes les valeurs de α correspondant à un comportement paramagnétique du matériau.

Rép. : $\alpha < 1/4$

b) Dans le cas particulier où $\alpha = -1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, l'expression de vecteurs $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale. Déterminez l'expression de cette matrice diagonale ainsi que celle de la matrice de transformation correspondant au passage d'une base à l'autre.

Rép. : $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \sqrt{2}\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$,
$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \sqrt{2}\mathbf{e}_3)$
$\mathrm{diag}\,(5\chi_0, \chi_0, \chi_0)$, $\mathsf{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

2) On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminez les valeurs de a pour que A soit semi-définie positive.

Rép. : $|a| \leq \sqrt{2}$

b) Soit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \sqrt{2}\sigma & 0 \\ \sqrt{2}\sigma & 3\sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{pmatrix}$$

(où $\sigma > 0$ est une constante) l'expression du tenseur de conductivité électrique d'un milieu anisotrope dans une base orthonormée $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ particulière. Sachant que les composantes du vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ sont liées aux composantes du vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par la relation matricielle

$$\mathsf{J} = \Sigma\,\mathsf{E}$$

montrez qu'il existe une direction de l'espace telle qu'un champ électrique dans cette direction n'engendre aucun courant électrique. Déterminez les composantes du vecteur unitaire dans cette direction.

Rép. : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$

3) Dans la base orthonormée $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, les composantes du tenseur de conductivité électrique $\mathbf{S}$ sont données par la matrice

$$\mathsf{S} = s_0 \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

où α est une constante réelle et où s_0 est une constante strictement positive.
Le tenseur $\mathbf{S}$ est tel que

$$\mathbf{j} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$$

si $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ désignent respectivement les vecteurs densité de courant et champ électrique.

a) Déterminez la (les) condition(s) sur α pour que la dissipation électrique $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul.

Rép. : $\alpha \in \left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$

b) Déterminez la (les) condition(s) sur α pour qu'il existe une direction de l'espace telle que l'application d'un champ électrique selon cette direction n'induit aucun courant dans le système.

Rép. : $\alpha \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ 1,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

c) Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$, l'expression de vecteurs $\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathbf{S}$ est représenté par une matrice diagonale. Précisez cette matrice.

Rép. : $\mathsf{S}' = \operatorname{diag}(0, s_0, 3s_0)$, $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3}{\sqrt{3}}$, $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_1}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{e}_3 = \dfrac{\mathbf{E}_1 + 2\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3}{\sqrt{6}}$

4) Dans une base cartésienne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, on détermine les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ sous la forme

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 3\sigma_0 \end{pmatrix} \qquad (\sigma_0 > 0)$$

a) Montrez qu'il existe une direction $\mathbf{n}$ de l'espace à laquelle n'est associée aucune traction de surface, *i.e.*

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Rép. : $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

b) Déterminez les composantes des vecteurs $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ dans la base des $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tels que $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ forment une base orthonormée dans laquelle $\boldsymbol{\sigma}$ est représenté par une matrice diagonale.

Rép. : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) La matrice T est-elle définie positive ?

Rép. : semi-définie positive

5) Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

représentant dans une base particulière l'application linéaire $\mathcal{A}$ qui associe le vecteur densité de courant $\mathbf{J}$ au vecteur champ électrique $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J} = \mathcal{A}(\mathbf{E})$.

a) Déterminez la condition que doit vérifier le paramètre réel α pour que A soit à la fois normale et inversible.

Rép. : $\alpha \neq 4$

b) Déterminez la condition sur le paramètre α pour que la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E}) = (\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E})$ soit strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué.

Rép. : $\alpha > 4$

c) Dans le cas où $\alpha = 4$, déterminez les composantes du champ électrique unitaire qui engendre la dissipation d'énergie $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ maximale.

Rép. : $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

6) Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$, son aimantation éventuelle peut être décrite par le moment dipolaire magnétique par unité de volume $\mathbf{M}$, communément appelé 'vecteur aimantation'. Si on excepte le cas des matériaux ferromagnétiques qui présentent une aimantation permanente, le vecteur $\mathbf{M}$ est relié à $\mathbf{H}$ par une loi du type $\mathbf{M} = \mathcal{X}(\mathbf{H})$ où $\mathcal{X}$ désigne une application linéaire.

Dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, on détermine les composantes de l'application linéaire $\mathcal{X}$ d'un matériau sous la forme

$$\mathsf{X} = \chi_0 \begin{pmatrix} 4 & 2\alpha & \alpha \\ 2\alpha & 4+3\alpha & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha & 4 \end{pmatrix}$$

où $\chi_0 > 0$ et α sont des constantes réelles.

a) Déterminez toutes les valeurs de α correspondant à un comportement isotrope, *i.e.* pour lesquelles il existe une constante β telle que $\mathbf{M} = \beta\mathbf{H}$ quel que soit le champ magnétique $\mathbf{H}$. Justifiez.

Rép. : 0

b) Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez l'expression en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ de vecteurs $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale. Précisez l'expression de cette matrice diagonale.

Rép. : $\mathsf{X}' = \mathrm{diag}(9\chi_0, 3\chi_0, 3\chi_0), \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$
$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)$

7) Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ \beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Calculez le déterminant de A.

Rép. : $\alpha\beta\gamma$

b) Calculez les valeurs propres de A.

Rép. : α, β, γ

c) Déterminez les conditions sur α, β, γ pour que A soit inversible.

Rép. : $\alpha\beta\gamma \neq 0$

d) Déterminez des conditions suffisantes sur α, β, γ pour que A soit diagonalisable par une transformation de similitude. Justifiez sans effectuer la transformation de similitude.

Rép. : α, β et γ différents deux à deux

e) Déterminez les conditions sur α, β, γ pour que A soit diagonalisable par une transformation de similitude utilisant une matrice orthogonale.

Rép. : $\beta = 0$

8) Soit une matrice $\mathsf{A} \in \mathbb{R}_n^n$ symétrique définie négative et

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$. Donnez l'expression des valeurs propres et des vecteurs propres de B.

Rép. : Si x est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ, alors λ est aussi une valeur propre de B et $\begin{pmatrix} \mathsf{x} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est un vecteur propre associé. De plus, $\begin{pmatrix} -(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n)^{-1}\mathsf{b} & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est un vecteur propre relatif à la valeur propre $\lambda = 1$.

9) On appelle matrice de Hadamard, une matrice $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_2 & \cdots & \mathsf{c}_n \end{pmatrix}$ carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1 ou à -1 et dont les colonnes c_1, $\mathsf{c}_2,\ldots,$ c_n sont mutuellement orthogonales.

a) Montrez qu'il ne peut exister de matrice de Hadamard que si n est pair.

b) Si H_n est une matrice de Hadamard d'ordre n, que vaut $\mathsf{H}_n^{\mathrm{T}}\mathsf{H}_n$? Rép. : $n\,\mathbb{I}$

c) Montrez que si H est une matrice de Hadamard, alors il en est de même de

$$\begin{pmatrix} \mathsf{H} & \mathsf{H} \\ \mathsf{H} & -\mathsf{H} \end{pmatrix}$$

d) Montrez que toutes les matrices de Hadamard H_n d'un même ordre n possèdent le même déterminant au signe près. Quelles valeurs peut prendre le déterminant ?

Rép. : $\pm\, n^{n/2}$

e) Montrez que toutes les valeurs propres des matrices de Hadamard d'ordre n sont égales à $\sqrt{n}$ en module.