6.3.3 Vecteurs et géométrie.

1) On donne les vecteurs libres

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, l'angle $\theta \in [0,\pi]$ entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ et $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 15$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{21}$, $\theta = \arccos(15/7\sqrt{6})$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = 10\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -6$

2) On donne les vecteurs libres

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, l'angle $\theta \in [0,\pi]$ entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ et $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{2}$, $\theta = \arccos(3/2\sqrt{7})$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = -4$

3) Calculez $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ si

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ constituent une base orthonormée.

Rép. : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 9$, $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3$

4) Montrez que, $\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\right)$$

5) Calculez $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ dans le cas où $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$.

Rép. : 0

6) Montrez que, $\forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathcal{E}$,

$$\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\ \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

7) Montrez que (identités de Jacobi)

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} + (\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge\mathbf{a} + (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

et

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) + \mathbf{b}\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) + \mathbf{c}\wedge(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

8) Montrez que (identité de Lagrange)

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$