Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2023

# MATH0013 - ALGÈBRE
## ÉVALUATION FORMATIVE

NOM : .......................... PRÉNOM : ....................

MATRICULE : ...........

*Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.*
*Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai indicatif de deux heures et demie.*

*Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur*
`http://www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

## Question I

Calculez, en simplifiant au maximum l'expression obtenue, le déterminant de la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ z & iz & 0 \\ \bar{z} & \bar{z} & -i \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{C}$$

## Question II

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

En discutant en fonction des paramètres $\beta$ et $\gamma$, déterminez le rang de $\mathsf{A}$ ainsi que les éventuelles relations linéaires entre les colonnes de $\mathsf{A}$.

## Question III

On appelle matrice de probabilité une matrice carrée dont tous les éléments sont réels, compris dans l'intervalle $[0,1]$ et telle que la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à 1.

i. Montrez que le produit de deux matrices de probabilité est encore une matrice de probabilité.
ii. Les matrices de probabilité sont-elles inversibles ? Justifiez.

## Question IV

Soit la matrice

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{A}$ est une matrice unitaire d'ordre $n$.

i. Que vaut le rang de $\mathsf{X}$ ?
ii. La matrice $\mathsf{X}$ est-elle normale ? Justifiez.

**SOLUTION TYPE**

## Question I

Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ z & iz & 0 \\ \overline{z} & \overline{z} & -i \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad z \in \mathbb{C}$$

*Connaissance d'une méthode correcte de calcul de déterminant (1ère loi des mineurs ou Sarrus, éventuellement avec opérations élémentaires) : 1 pt*

En appliquant la première loi des mineurs à la 3ème colonne de la matrice, on obtient

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ z & iz & 0 \\ \overline{z} & \overline{z} & -i \end{vmatrix} \\ &= (1+i)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} z & iz \\ \overline{z} & \overline{z} \end{vmatrix} - i(-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 1 & i \\ z & iz \end{vmatrix} \\ &= (1+i)(z\overline{z} - iz\overline{z}) - i(iz - iz) = (1+i)(1-i)|z|^2 = (1-i^2)|z|^2 = 2|z|^2 \end{aligned}$$

*Résultat correct (sans déterminant) : 2 pts*

*Résultat simplifié : 2 pts*

TOTAL QI : 5 PTS

## Question II

*Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 2 pts*

*Attention : dans les cas où le rang vaut 2, il faut montrer ou annoncer que tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls pour mériter les points du principe.*

Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons déjà remarquer que, quelles que soient les valeurs des paramètres $\beta$ et $\gamma$, $\mathsf{c}_2 = 2\mathsf{c}_1$ et donc, que ce résultat devra se retrouver dans la discussion qui suit.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée sans modifier son rang, ni les éventuelles relations linéaires entre les colonnes.

Commençons par échanger la première et la deuxième ligne, ce qui donne

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement,

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 2-2\beta \\ 0 & 0 & \gamma-2 & 1-2\beta \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{c}_2 \leftrightarrow \mathsf{c}_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 2-2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\beta & \gamma-2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

*La présence de signes d'égalité entre les matrices successives donne lieu à une pénalité de 2 pts pour l'exercice.*

Notons que cet échange de colonnes modifie les relations linéaires entre les colonnes et qu'il faudra être attentif à la renumérotation de celles-ci.

- Si $\beta \neq 1$, on continue l'échelonnage en divisant la deuxième ligne par $2-2\beta$,

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\beta & \gamma-2 & 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - \beta\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - (1-2\beta)\ell_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma-2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

  ◇ Si $\gamma \neq 2$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par $\gamma - 2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  puis

$$\ell_1 \to \ell_1 - \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Le rang de A est égal à 3 dans ce cas.

  *Rang si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$ : 2 pts*

  Les opérations élémentaires portant sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. On notera cependant que les colonnes 2 et 4 ont été échangées dès le début de l'échelonnage. Il y a dans ce cas une relation linéaire entre les colonnes qui peut s'écrire

  *Nombre de relations linéaires exact : 1 pt*

  *Relation linéaire : 1 pt*

$$c_4^{new} = 2c_1$$

  soit

$$c_2 = 2c_1$$

  ◇ Si $\gamma = 2$, la matrice $(**)$ est sous la forme normale échelonnée

  *Rang si $\beta \neq 1$ et $\gamma = 2$ : 2 pts*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et son rang est égal à 2.

  Il y a dans ce cas deux relations linéaires entre les colonnes qui peuvent s'écrire

$$c_4^{new} = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_3 = c_1$$

  *Nombre de relations linéaires exact : 1 pt*

  *Relations linéaires : 1 pt*

  soit

$$c_2 = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_3 = c_1$$

- Si $\beta = 1$, la matrice $(*)$ devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma-2 & 0 \end{pmatrix}$$

En échangeant la deuxième et la troisième ligne, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \gamma-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplions ensuite la deuxième ligne par $-1$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de retirer la deuxième ligne à la première pour obtenir une forme normale échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+\gamma & 2 \\ 0 & 1 & 2-\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui indique que le rang vaut 2 dans ce cas et qu'il y a 2 relations linéaires entre les colonnes qui peuvent s'écrire

*Rang si $\beta = 1$, $\forall\gamma$ : 2 pts*

$$c_4^{new} = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_3 = (-1+\gamma)c_1 + (2-\gamma)c_2^{new}$$

soit

$$c_2 = 2c_1 \quad \text{et} \quad c_3 = (-1+\gamma)c_1 + (2-\gamma)c_4$$

*Nombre exact de relations linéaires : 1 pt*

*Relations linéaires : 2 pts*

En conclusion,

- si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$, $\rho(A) = 3$ et $c_2 = 2c_1$ ;
- si $\beta \neq 1$ et $\gamma = 2$, $\rho(A) = 2$, $c_2 = 2c_1$ et $c_3 = c_1$ ;
- si $\beta = 1$, $\rho(A) = 2$, $c_2 = 2c_1$ et $c_3 = (-1+\gamma)c_1 + (2-\gamma)c_4$.

*Présence d'une conclusion cohérente avec les résultats obtenus. : 1 pt*

TOTAL QII : 16 PTS

## Question III

i. Considérons A et B, deux matrices de probabilité d'ordre $n$. Les éléments de la matrice P, produit de ces deux matrices, s'écrivent

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i \in \{1,\ldots,n\} \quad \text{et} \quad j \in \{1,\ldots,n\}$$

*Expression des éléments de P : 2 pts*

La matrice P est une matrice de probabilité puisqu'elle en vérifie les 3 caractéristiques.

- Ses éléments $p_{ij}$ sont réels puisque ceux des matrices de probabilité A et B le sont.
- La somme des éléments de chacune de ses lignes vaut 1. En effet, la somme des éléments de la ligne $i$ ($i = 1,\ldots,n$) s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$

  puisque, B étant une matrice de probabilité, la somme des éléments de sa ligne $k$ vaut 1 et que, A étant une matrice de probabilité, la somme des éléments de sa ligne $i$ vaut 1.

*Justification du caractère réel : 1 pt*

*Expression de la somme des éléments d'une ligne quelconque : 1 pt*

*Manipulation des sommes : 1 pt*

*Justification de la conclusion : 1 pt*

- Ses éléments $p_{ij}$ appartiennent à $[0,1]$ puisqu'ils sont positifs par construction et que la somme de ceux d'une ligne vaut 1.

*Justification de l'appartenance à $[0,1]$ : 1 pt*

*Total i. : 7 pts*

ii. Les matrices de probabilité ne sont pas toujours inversibles comme le montre le contre-exemple de la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
qui est une matrice de probabilité puisque
- ses éléments sont réels ;
- ses éléments appartiennent à $[0,1]$ ;
- la somme des éléments de chacune des lignes vaut 1.

Elle n'est cependant pas inversible puisque $\det \mathsf{A} = 0$.

*Contre-exemple correct : 1 pt*

*Vérification (même seulement annoncée si évident) des 3 propriétés : 1 pt*

*Négation de la thèse : 1 pt*

*Total ii. : 3 pts*

TOTAL QIII : 10 PTS

## Question IV

Soit
$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}$$

i. La matrice $\mathsf{A}$ étant unitaire, son inverse existe et vaut $\mathsf{A}^*$. Le rang de $\mathsf{A}$ est donc égal à $n$, de même que celui de $i\mathsf{A}$ et de $\mathsf{A}^*$.

Nous pouvons donc en conclure que les lignes $\ell_1$ à $\ell_n$ de $\mathsf{X}$ sont linéairement indépendantes de même que les lignes $\ell_{n+1}$à $\ell_{2n}$. Par ailleurs, les $n$ premières lignes et les $n$ dernières sont manifestement indépendantes entre elles vu la présence des blocs de zéros. Finalement, on a bien $2n$ lignes linéairement indépendantes de sorte que $\rho(\mathsf{X}) = 2n$.

De façon alternative, on peut échanger les $n$ premières lignes et les $n$ dernières lignes dans la matrice $\mathsf{X}$, opérations élémentaires qui ne modifient pas son rang. On obtient alors la matrice
$$\begin{pmatrix} \mathsf{A}^* & 0 \\ 0 & i\mathsf{A} \end{pmatrix}$$
qui est diagonale par blocs et dont le déterminant, égal au produit des déterminants des deux blocs, est différent de zéro puisque les deux blocs sont de rang $n$. On en conclut une nouvelle fois que la matrice $\mathsf{X}$ est non singulière et que son rang est égal à $2n$.

*Connaissance du concept de matrice unitaire : 1 pt*

*Rang de $\mathsf{A}$ égal à $n$ : 1 pt*

*Rang de $\mathsf{A}^*$ et $i\mathsf{A}$ égaux à $n$ : 1 pt*

*Démonstration complète : 1 pt*

*Rang correct (avec justification) : 1 pt*

*Total i. : 5 pts*

ii. La matrice $\mathsf{X}$ est normale si elle commute avec son adjointe, c'est-à-dire si
$$\mathsf{X}\mathsf{X}^* = \mathsf{X}^*\mathsf{X}$$
On a
$$\mathsf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{i\mathsf{A}} \\ \overline{\mathsf{A}^*} & \overline{0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -i\overline{\mathsf{A}} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ -i\mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}$$
de sorte que
$$\mathsf{X}\mathsf{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ -i\mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}\mathsf{A}^* & 0 \\ 0 & \mathsf{A}^*\mathsf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{2n}$$
et
$$\mathsf{X}^*\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ -i\mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}\mathsf{A}^* & 0 \\ 0 & \mathsf{A}^*\mathsf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} = \mathbb{I}_{2n}$$
ce qui démontre que la matrice $\mathsf{X}$ est normale et même unitaire.

*Connaissance du concept de matrice normale : 1 pt*

*Expression correcte de $\mathsf{X}^*$ : 2 pts*

*Valeur exacte des deux produits : 2 pts*

*Total ii. : 5 pts*

TOTAL QIV : 10 PTS

## Commentaires et erreurs les plus fréquentes

De façon générale, quand des opérations élémentaires sont appliquées aux rangées d'une matrice dans le but de déterminer plus facilement son rang ou son déterminant, les matrices successives obtenues ne sont pas égales entre elles. Il est donc tout à fait inapproprié de relier ces matrices par une suite d'égalités. Seules certaines propriétés des matrices sont conservées, comme leur rang ou, si on ne procède à aucun échange ni multiplication des rangées, leur déterminant.

### Question I

- Il n'était pas nécessaire d'introduire les parties réelle et imaginaire de $z$ pour exprimer la réponse. L'énoncé étant formulé en fonction de $z$, il est préférable d'exprimer la réponse en fonction du même paramètre.

  Si de nouveaux paramètres sont introduits dans le cadre d'un développement, ceux-ci doivent être explicitement et clairement définis. Dans le cas de cet exercice, si les parties réelle et imaginaire de $z$ sont utilisées, il faut les définir en précisant que $z = a + ib$.
- Si on multiplie (divise) une rangée de la matrice par un nombre pour en faciliter le calcul du déterminant, le déterminant obtenu sera lui aussi multiplié (divisé) par ce nombre.
- Il était demandé de simplifier au maximum le résultat obtenu. En particulier, ceci impliquait d'exploiter la propriété $z\overline{z} = |z|^2$.

### Question II

- Quand un énoncé contient un ou plusieurs paramètres, la discussion éventuelle ne doit pas être menée arbitrairement en choisissant des valeurs des paramètres qui simplifient le problème posé. Ce n'est que quand une opération ne peut être réalisée pour certaines valeurs des paramètres qu'il faut commencer à discuter, par exemple quand ces paramètres annulent une expression par laquelle on divise une ligne de la matrice. Il faut alors traiter séparément le cas où les paramètres ne posent aucun problème et les cas particuliers correspondant aux valeurs des paramètres exclues initialement.
- La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées. Puisqu'il est aussi demandé d'identifier les relations linéaires entre les colonnes de la matrice, il faut privilégier les opérations sur les lignes par rapport à la manipulation des colonnes. Si des opérations élémentaires sont effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Si, par contre, des opérations élémentaires sont effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées.
- Pour échelonner une matrice, il faut procéder avec ordre et méthode. Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou

des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.

- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

  ne sont pas licites; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.

- Le rang d'une matrice est aussi égal à l'ordre de la plus grande matrice non singulière que l'on peut extraire de la matrice de départ, éventuellement après des opérations élémentaires sur les rangées de la matrice. Il faut être attentif au fait que, par exemple, pour pouvoir affirmer que le rang de la matrice est égal à 2, il faut avoir vérifié que toutes les sous-matrices d'ordre 3 que l'on peut extraire de la matrice de départ, c'est-à-dire 4 dans le cas qui nous occupe, sont singulières.

- Le nombre de relations linéaires entre les colonnes de la matrice est égal au nombre de ses colonnes diminué du rang de la matrice. Ici, si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$, le rang de la matrice étant égal à 3, il y a une seule relation linéaire entre les 4 colonnes de la matrice. Pour $\beta \neq 1$ et $\gamma = 2$, le rang de la matrice est égal à 2 et il y a donc 2 relations linéaires entre les 4 colonnes de la matrice.

- Quand l'échelonnage de la matrice requiert un échange de deux colonnes, il faut en tenir compte quand on exprime les relations linéaires entre les colonnes. Par exemple, dans le cas $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$, les colonnes 2 et 4 ont été échangées dans la solution type. La relation observée sur la forme normale échelonnée entre les colonnes 4 et 1 correspond donc en réalité à une relation entre les colonnes 2 et 1 de la matrice donnée.

## Question III

Rappelons qu'un exemple ne constitue jamais une démonstration de la véracité d'un énoncé alors qu'un contre-exemple permet de démontrer qu'un énoncé est faux. Dans cette question, l'item i ne pouvait pas être traité en utilisant un exemple, même l'exemple général d'une matrice d'ordre 2 ou d'ordre 3. Par contre, il suffisait de trouver une matrice de probabilité non inversible pour réfuter l'item ii.

i.
- Les matrices de probabilité vérifient trois propriétés. Tous leurs éléments sont réels. Ils sont compris dans l'intervalle $[0,1]$ et la somme des éléments de chacune des lignes est égale à 1. Afin de prouver que la matrice obtenue en multipliant deux matrices de probabilité est elle-même une matrice de probabilité, il faut vérifier ces 3 propriétés. Il ne suffit pas de démontrer que la somme des éléments de chacune des lignes de la matrice est égale à 1.

Plus généralement, quand un énoncé ou une propriété à démontrer comporte plusieurs éléments, il faut examiner successivement chacun de ces éléments.

- Il est important de respecter les notations pour donner du sens aux expressions mathématiques que l'on écrit. En particulier, il ne faut pas confondre une matrice $\mathsf{A}$ et son élément $ij$ noté $a_{ij}$ ou $(\mathsf{A})_{ij}$.
- Trop d'étudiants ont confondu l'expression

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

qui représente l'élément $ij$ de la matrice produit avec

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

qui représente la somme des éléments de la ligne $i$ de la matrice produit.
- Il n'est pas correct d'écrire

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\right)$$

car l'indice $k$ porte aussi sur les éléments $b_{kj}$. De même

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\right)$$

car il s'agit de la somme des produits des éléments correspondants de la ligne $i$ de $\mathsf{A}$ et de la colonne $j$ de $\mathsf{B}$ et pas du produit des sommes des éléments de la ligne $i$ de $\mathsf{A}$ et de la colonne $j$ de $\mathsf{B}$.
- Démontrer que les produits $a_{ik}b_{kj}$ appartiennent à $[0,1]$ ne suffit pas pour affirmer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \in [0,1].$$

La propriété déjà démontrée disant que les sommes des éléments des lignes de la matrice $AB$ valent 1 est nécessaire pour pouvoir conclure.

ii. En plus de fournir un contre-exemple valide, il fallait justifier que celui-ci vérifiait bien les trois propriétés d'une matrice de probabilité.

Plus généralement, quand on montre qu'un énoncé est faux en présentant un contre-exemple, il ne suffit pas de citer ce contre-exemple. Il faut aussi montrer qu'il vérifie les hypothèses de l'énoncé mais en contredit la thèse.

## Question IV

i.
- La matrice $\mathsf{X}$ est une matrice définie par blocs. Elle comprend 4 blocs carrés d'ordre $n$ puisque $\mathsf{A}$ est une matrice d'ordre $n$. Il ne s'agit pas d'une matrice d'ordre 2 comportant 4 éléments !
- Il ne faut pas confondre l'ordre d'une matrice (sa taille) avec son rang. Ce n'est pas parce que $\mathsf{X}$ est d'ordre $2n$ que son rang vaut aussi $2n$. Ce résultat doit être justifié rigoureusement, par exemple comme cela est fait dans la solution type.

ii.
- La matrice adjointe est obtenue en transposant et conjugant, dans un ordre ou dans l'autre, la matrice de départ, soit

$$\mathsf{X}^* = \overline{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}} = \overline{\mathsf{X}^{\mathrm{T}}}$$

- Lorsqu'on transpose une matrice défine par bloc, il faut non seulement permuter les blocs qui se correspondent de part et d'autre de la diagonale principale mais également transposer séparément chacun des blocs pour faire en sorte que, conformément à la définition de la transposée, les lignes de la matrice initiale deviennent les colonnes de la matrice transposée. On a donc

$$\mathsf{X}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathsf{A} \\ (\mathsf{A})^* & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A}^{*\mathrm{T}} \\ (i\mathsf{A})^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mathsf{A}} \\ i\mathsf{A}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et non} \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A}^* \\ i\mathsf{A} & 0 \end{pmatrix}$$

- Rappelons que le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués de sorte que

$$\overline{i\mathsf{A}} = \bar{i}\ \overline{\mathsf{A}} = -i\overline{\mathsf{A}}$$