Octobre 2021

Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0013 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Question I

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 10 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & -1 \\ -1 & -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez le rang de A.

ii. Déterminez les éventuelles relations linéaires existant entre les colonnes de A.

Question II

On considère la matrice carrée A d'ordre n dont les éléments sont donnés par

$$a_{ij} = i - j, \qquad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

i. Explicitez A en faisant apparaître ses éléments dans le cas où $n > 0$ est quelconque.

ii. Calculez $\det \mathsf{A}$ dans le cas où $n = 3$.

iii. Déterminez toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}_0$ pour lesquelles A est singulière.

Question III

i. Répondez par VRAI ou FAUX et justifiez.
   (a) Le déterminant d'une somme de matrices carrées d'ordre n est égal à la somme des déterminants des matrices de cette somme.
   (b) Si x est une matrice colonne non nulle appartenant à $\mathbb{R}^5$, alors le rang de la matrice $\mathsf{x}\mathsf{x}^T$ est égal à 1.
   (c) Si elle existe, l'inverse d'une matrice normale est également normale.

ii. Si A est une matrice carrée non singulière, montrez que la matrice Δ des cofacteurs de A est non singulière et déterminez Δ^{-1}.

Question I

Principe du calcul du rang (que ce principe soit énoncé ou mis en oeuvre), soit par réduction à une forme échelonnée, soit par détermination du nombre de rangées linéairement indépendantes, soit par extraction d'une matrice non singulière d'ordre maximal : 2 pts

i. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 10 & 8 & 0 \\ 2 & -6 & -5 & -1 \\ -1 & -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée. Ces opérations n'affectent pas le rang.
Il vient

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \\ \ell_4 \to \ell_4 + \ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise en oeuvre de la méthode choisie : 3 pts

- *Identification d'une sous-matrice non singulière d'ordre 2 sans montrer que* $\det \mathsf{A}$ *et les 16 déterminants d'ordre 3 sont nuls :* -2 *pts*
- *Une erreur de principe dans l'application des opérations élémentaires :* -2 *pts*
- *Erreurs de calcul : une erreur* $\to -1$ *pt, plusieurs erreurs* $\to -2$ *pts*

NB L'utilisation d'opérations élémentaires sur les colonnes ne peut être sanctionnée dans le cadre du calcul du rang.

Ensuite, successivement,

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2/2 \\ \ell_4 \to \ell_4/2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \\ \ell_4 \to \ell_4 + \ell_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2/4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et enfin,

$$\ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeur correcte du rang (et cohérente avec les développements effectués) : 2 pts

Total i. : 7 pts

On peut donc conclure que $\rho(\mathsf{A}) = 2$.

ii. Les opérations élémentaires portant exclusivement sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. En exploitant les développements du point précédent, on identifie dès lors les relations linéaires indépendantes

$$\mathsf{c}_3 = -\frac{1}{4}\mathsf{c}_1 + \frac{3}{4}\mathsf{c}_2 \quad \text{et} \quad \mathsf{c}_4 = -\frac{5}{4}\mathsf{c}_1 - \frac{1}{4}\mathsf{c}_2$$

Nombre correct de relations (annoncé ou obtenu) : 1 pt
Relations correctes : 2 pts
Total ii. : 3 pts
TOTAL QI : 10 PTS

Question II

i. Soit A_n, la matrice d'ordre n dont les éléments sont donnés par $a_{ij} = i - j$. On a

$$\mathsf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & \cdots & -(n-2) & -(n-1) \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(n-3) & -(n-2) \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & -(n-4) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & -1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Total i. : 1 pt

ii. Pour $n = 3$, on a

Expression de A_3 : 1 pt

$$\mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant la première loi des mineurs à la première ligne de cette matrice, on obtient

Méthode de calcul correcte : 1 pt
Valeur exacte du déterminant : 2 pts

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Total ii. : 4 pts

iii. L'examen de la forme générale de A_n montre que la différence entre les éléments de deux lignes successives quelconques est toujours égale à 1. On peut exploiter cette propriété pour calculer le déterminant en introduisant successivement les opérations élémentaires $\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2$ puis $\ell_2 \to \ell_2 - \ell_3$ pour obtenir

Valeur du déterminant pour $n \geq 3$ quelconque : 5 pts

$$\det \mathsf{A}_n = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -(n-3) & -(n-2) \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & -(n-4) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & -1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & -(n-4) & -(n-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & -1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

puisque le déterminant comporte alors deux lignes identiques.

Ce raisonnement ne peut être mené que si la matrice comporte au moins 3 lignes. Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$ on calcule aisément

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \det \mathsf{A}_1 = 0$$

$$\mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \mathsf{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Traitement des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$: 1 pt

En conclusion, la matrice A est donc singulière pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}_0$ différentes de 2.

Conclusion : 1 pt

Remarquons que l'annulation du déterminant peut être justifiée pour toutes les valeurs impaires de n par le raisonnement suivant. La matrice A étant antisymétrique, on peut écrire

$$\det \mathsf{A} = \det(-\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = (-1)^n \det(\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = -\det \mathsf{A}$$

de sorte que $\det \mathsf{A} = 0$ si n est impair.

Si ce seul raisonnement est tenu et correct : 3 pts, cumulables avec le point des cas particuliers.

Total iii. : 7 pts

TOTAL QII : 12 PTS

Question III

Une réponse correcte (Vrai ou Faux) donnée sans justification ne donne droit à aucun point.

i. (a) L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple suivant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 \neq \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Contre-exemple correct : 2 pts

Total (a) : 2 pts

(b) L'énoncé est vrai.

En effet,

$$\mathsf{x}\mathsf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 & x_1x_5 \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 & x_2x_5 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & x_3^2 & x_3x_4 & x_3x_5 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & x_4^2 & x_4x_5 \\ x_5x_1 & x_5x_2 & x_5x_3 & x_5x_4 & x_5^2 \end{pmatrix}$$

Expression matricielle de $\mathsf{x}\mathsf{x}^{\mathrm{T}}$: 1 pt

Comme $\mathsf{x} \neq 0$, au moins un des x_i diffère de 0. Supposons donc que $x_1 \neq 0$.

D'une part,

$$(\mathsf{x}\mathsf{x}^{\mathrm{T}})_{11} = x_1^2 \neq 0$$

et le rang de la matrice est supérieur ou égal à 1.

Rang au moins égal à 1 : 1 pt

D'autre part, les colonnes 2 à 5 s'écrivent

$$\mathsf{c}_i = \frac{x_i}{x_1}\,\mathsf{c}_1, \qquad i = 2, \ldots, 5$$

Démonstration (rangées multiples de x ou x^{T}) : 2 pts

Elles sont donc toutes des multiples de la première colonne $\mathsf{c}_1 \neq 0$.

En conclusion, la matrice $\mathsf{x}\mathsf{x}^{\mathrm{T}}$ possède exactement une colonne linéairement indépendante et son rang vaut un, comme annoncé.

Total (b) : 4 pts

(c) L'énoncé est vrai.

La matrice N étant normale, on a $\mathsf{N}^*\mathsf{N} = \mathsf{N}\mathsf{N}^*$.

Comme N est inversible, N^{-1} existe et $(\mathsf{N}^{-1})^* = (\mathsf{N}^*)^{-1}$. De là, on déduit

$$(\mathsf{N}^{-1})^*\mathsf{N}^{-1} = (\mathsf{N}^*)^{-1}\mathsf{N}^{-1} = (\mathsf{N}\mathsf{N}^*)^{-1} = (\mathsf{N}^*\mathsf{N})^{-1} = \mathsf{N}^{-1}(\mathsf{N}^*)^{-1} = \mathsf{N}^{-1}(\mathsf{N}^{-1})^*$$

donc

$$(\mathsf{N}^{-1})^*\mathsf{N}^{-1} = \mathsf{N}^{-1}(\mathsf{N}^{-1})^*$$

et N^{-1} est normale.

Connaissance du concept de matrice normale : 1 pt

Thèse traduite mathématiquement : 1 pt

La propriété $(\mathsf{N}^{-1})^* = (\mathsf{N}^*)^{-1}$ ne doit pas être redémontrée mais un point peut être retiré en cas d'erreur dans cette démonstration.

Démonstration : 2 pts

Total (c) : 4 pts

Total i. : 10 pts

ii. Si A est une matrice carrée d'ordre n non singulière, on a

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{\det \mathsf{A}}$$

de sorte que

$$\Delta^{\mathrm{T}} = \det \mathsf{A}\ \mathsf{A}^{-1}$$

En transposant cette relation, on obtient

$$\Delta = \det \mathsf{A}\ (\mathsf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = \det \mathsf{A}\ (\mathsf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

et donc la matrices des cofacteurs est non singulière et

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\det \mathsf{A}}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}$$

Relation entre l'inverse et la matrice des cofacteurs : 1 pt

La propriété $(\mathsf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathsf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}$ ne doit pas être redémontrée mais un point peut être retiré en cas d'erreur dans cette démonstration.

Remarquons qu'il est aussi possible de montrer que Δ est non singulière en montrant que son déterminant est différent de 0. On a

$$\det \Delta = (\det \mathsf{A})^n \det (\mathsf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\det \mathsf{A})^n \det(\mathsf{A}^{-1}) = \frac{(\det \mathsf{A})^n}{\det \mathsf{A}} = (\det \mathsf{A})^{n-1} \neq 0$$

puisque A est non singulière.

Démonstration de l'existence de l'inverse de Δ ou du caractère non nul de son déterminant : 1 pt

Expression de l'inverse de Δ : 2 pts

Total ii. : 4 pts

TOTAL QIII : 14 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Question I

i. La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées et en procédant avec ordre et méthode. La nature de la sous-question ii. conduit à privilégier les opérations sur les lignes par rapport à la manipulation des colonnes.

   Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des lignes ou des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.

   Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

   ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.

ii.
   - Le nombre de relations linéaires entre les rangées d'une matrice est égal au nombre de ces rangées diminué du rang de la matrice. Ici, le rang de cette matrice d'ordre 4 étant égal à 2, 2 relations linéaires existent entre les colonnes de la matrice.
   - Quand les opérations élémentaires menant à la forme normale échelonnée ont été effectuées uniquement sur les lignes de la matrice, les relations linéaires entre les colonnes sont conservées. Celles-ci se lisent donc dans la matrice réduite. Par contre, si des opérations élémentaires ont été effectuées sur les colonnes, les relations linéaires entre celles-ci ne sont pas conservées. Quand on cherche les relations linéaires entre les colonnes, il convient donc de ne manipuler que les lignes comme expliqué ci-dessus, avec éventuellemet un échange de colonnes qui peut être gardé en mémoire pour exprimer correctement les relations recherchées.

Question II

i. Quand on explicite une matrice d'ordre n, il convient de donner suffisamment d'éléments. En particulier, il est nécessaire d'exprimer les premières et dernières lignes et colonnes. Il ne suffit pas de donner les 9 éléments du coin supérieur gauche.

ii. Le calcul d'un déterminant d'ordre 3 peut être effectué de différentes façons : développement de Laplace, transformations successives par des opérations élémentaires ou méthode de Sarrus. Notons que cette dernière approche n'est valable que pour le calcul d'un déterminant d'ordre 3.

iii.
- Rappelons qu'un exemple ne constitue jamais une démonstration. Traiter uniquement les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ ne permet pas d'obtenir de réponse générale.
- La matrice A étant anti-symétrique, on peut facilement démontrer que son déterminant est nul pour toutes les valeurs de n impaires. On ne peut par contre obtenir aucune conclusion pour n pair en se basant sur cette caractéristique de la matrice.

  La matrice possède une structure particulière qui va au-delà de son anti-symétrie. Ne pas exploiter cette structure particulière conduit à se priver de la possibilité de réaliser d'autres développements. C'est en exploitant cette structure particulière qu'il était possible de démontrer que le déterminant est nul pour toutes les valeurs de $n \geq 3$.
- Si une démonstration est menée comme dans la solution-type en effectuant des opérations élémentaires faisant intervenir 3 lignes de la matrice, il est indispensable de traiter séparément les cas $n = 1$ et $n = 2$ qui ne comportent pas ces 3 lignes.
- Remarquons encore que, contrairement à ce qu'on a pu lire sur un certain nombre de copies, une matrice dont la diagonale ne comporte que des éléments nuls n'est pas forcément singulière.

Question III

i. (a)
- Un exemple ne constitue pas une démonstration. Un contre-exemple suffit par contre à démontrer qu'une proposition est fausse. L'énoncé proposé était manifestement faux, ce qui pouvait être vérifié par une multitude d'exemples.
- Le déterminant d'une matrice d'ordre 2 est calculé en soustrayant (et pas en additionnant) au produit des éléments de la diagonale principale celui des éléments de la diagonale secondaire.
- Les essais infructueux de démonstration ont mis en évidence une mauvaise compréhension de l'expression générale de la première loi des mineurs. Les cofacteurs qui interviennent dans cette loi sont bien ceux des éléments de la rangée de la matrice que l'on développe. Ils sont donc en particulier différents d'une matrice à l'autre. Par ailleurs, les cofacteurs d'une matrice obtenue en sommant deux matrices ne sont pas égaux à ceux obtenus en sommant les cofacteurs correspondants des deux matrices.

(b)
- La première chose à faire est évidemment d'exprimer la matrice $\mathrm{x}\mathrm{x}^T$ qui est une matrice d'ordre 5 et pas un scalaire comme le serait $\mathrm{x}^T\mathrm{x}$.

- Montrer que toutes les colonnes de la matrice sont multiples l'une de l'autre permet de démontrer que le rang est au maximum égal à 1 puisqu'il n'y a qu'une colonne linéairement indépendante. Il faut encore démontrer que le rang n'est pas nul. Ceci se fait en rappelant qu'au moins un des éléments diagonaux de la matrice est non nul vu que $\mathsf{x} \neq 0$.
- Remarquons que $\mathsf{x} \neq 0$ n'implique pas que les 5 élément x_i de x ne sont pas nuls mais bien qu'un des x_i au moins est non nul.

(c)

- La traduction mathématique des hypothèses et de la thèse est la première étape indispensable de toute démonstration. L'hypothèse est ici que la matrice considérée est normale, c'est-à-dire qu'elle commute avec son adjointe, ce que l'on écrit
$$\mathsf{N}^*\mathsf{N} = \mathsf{N}\mathsf{N}^*$$
La thèse est que l'inverse de cette matrice normale est également normale, ce que l'on écrit
$$\left(\mathsf{N}^{-1}\right)^*\mathsf{N}^{-1} = \mathsf{N}^{-1}\left(\mathsf{N}^{-1}\right)^*$$
Expliciter les hypothèses et la thèse permet de mesurer le chemin à accomplir pour la démonstration.
- La démonstration consiste ensuite à partir d'un des deux membres de l'égalité à démontrer et à le transformer pour obtenir l'autre membre en utilisant l'hypothèse et les règles connues d'algèbre. En particulier ici, il était utile d'utiliser
$$(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \quad \text{et} \quad \left(\mathsf{N}^{-1}\right)^* = \left(\mathsf{N}^*\right)^{-1}$$
- On ne rappellera jamais assez qu'on ne manipule pas les matrices comme des nombres. En particulier, il n'est pas licite de diviser par une matrice.

ii.

- La formule de l'inverse permet de relier une matrice à la matrice de ses cofacteurs. C'était de toute évidence à cette formule qu'il fallait faire appel ici.
- Rappelons que, si la matrice M est d'ordre n,
$$\det(\lambda\mathsf{M}) = \lambda^n \det\mathsf{M}$$
de sorte que
$$\det\Delta = \det\left[(\det\mathsf{A})\ \mathsf{A}^{-\mathrm{T}}\right] = (\det\mathsf{A})^n \det\mathsf{A}^{-\mathrm{T}}$$