LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2020

MATH0013-1 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e) et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures et demie.

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours d'Analyse du 13 octobre (Groupe A) ou du cours d'Algèbre du 14 octobre (Groupe Z).*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} m-1 & m & m \\ 1 & m & m(m-1) \\ 1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

où m désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de m,

i. déterminez le rang de A ;
ii. le cas échéant, donnez la(les) relation(s) linéaire(s) existant entre les colonnes de A.

Question II

Pour tout $n \geq 2$, on définit le déterminant Δ_n où a est un réel par

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

i. Calculez Δ_2.
ii. Montrez que, pour tout $n > 2$, Δ_n vérifie une relation de récurrence du type

$$\Delta_n = \alpha \Delta_{n-1} + f(n)$$

où la constante α et la fonction $f(n)$ sont à déterminer.

iii. En exploitant les résultats ci-dessus et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, montrez que

$$\Delta_n = a^n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} a^{n-2}, \qquad \forall n \geq 2$$

Question III

On considère une matrice A réelle, carrée, d'ordre n et non singulière ainsi que des matrices colonnes non nulles c et d appartenant à $\mathbb{R}^n$.

i. Déterminez les dimensions de $\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}$ et de $\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$.

ii. Déterminez le rang de $\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}$.

iii. Déterminez la valeur du scalaire α telle que, dans le cas où $1+\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c} \neq 0$, l'inverse de la matrice $\mathsf{B} = \mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}$ peut être obtenue à partir de l'inverse de A selon (formule de Sherman-Morrison)

$$\left(\mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathsf{A}^{-1} + \alpha\, \mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}$$

Question I

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible, soit par l'identification du nombre de lignes ou colonnes linéairement indépendantes : 2 pts

i. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} m-1 & m & m \\ 1 & m & m(m-1) \\ 1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée. Ces opérations n'affectent pas le rang.

Commençons par échanger la première et la deuxième ligne pour amener un "1" en position $a_{1,1}$ sans devoir initier d'emblée une discussion en fonction de m. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & m & m(m-1) \\ m-1 & m & m \\ 1 & m & m-1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 - (m-1)\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & m & m(m-1) \\ 0 & m-(m-1)m & m-(m-1)^2 m \\ 0 & 0 & m-1-m(m-1) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & m & m(m-1) \\ 0 & m(2-m) & m^2(2-m) \\ 0 & 0 & -(1-m)^2 \end{pmatrix} \qquad (\spadesuit)$$

Si $m \neq 0$ et $m \neq 2$, on peut continuer l'échelonnage en divisant la deuxième ligne par $m(2-m)$, ce qui donne

Identification des cas particuliers $m = 0$ et $m = 2$: 2 pts

$$\begin{pmatrix} 1 & m & m(m-1) \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & -(1-m)^2 \end{pmatrix}$$

et ensuite,

$$\ell_1 \to \ell_1 - m\ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & -(1-m)^2 \end{pmatrix} \qquad (\clubsuit)$$

Si, en plus, $m \neq 1$, on peut diviser la dernière ligne par $-(1-m)^2$, ce qui donne

Identification du cas particulier $m = 1$: 1 pt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis, finalement,

Rang si $m \notin \{0,\ 1,\ 2\}$: 2 pts

$$\begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 + m\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - m\ell_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc conclure que $\rho(\mathsf{A}) = 3$ si $m \notin \{0,\ 1,\ 2\}$.

Si $m = 0$, la matrice (♠) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

de sorte que $\rho(A) = 2$ puisque la matrice possède manifestement exactement deux colonnes linéairement indépendantes. *Rang si $m = 0$: 2 pts*

Si $m = 1$, la matrice (♣) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

de sorte que $\rho(A) = 2$. *Rang si $m = 1$: 2 pts*

Si $m = 2$, la matrice (♠) devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

En échangeant les lignes ℓ_2 et ℓ_3, puis les colonnes c_2 et c_3, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement *Rang si $m = 2$: 2 pts*

$$\ell_2 \to -\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

de sorte que $\rho(A) = 2$. *Total i. : 13 pts*

ii. Quand les opérations élémentaires effectuées portent exclusivement sur les lignes de la matrice, elles ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. En considérant les formes obtenues suite à ces transformations, on peut donc obtenir les conclusions suivantes.

- Si $m \notin \{0,\ 1,\ 2\}$, les colonnes de A sont linéairement indépendantes, *i.e.* il n'existe pas de relation linéaire entre celles-ci. *Pas de relation linéaire si $m \notin \{0,\ 1,\ 2\}$: 1 pt*
- Si $m = 0$, la deuxième colonne de A est nulle, *i.e.* $c_2 = 0$. *$c_2 = 0$ si $m = 0$: 2 pts*
- Si $m = 1$, on déduit de (2) la relation linéaire $c_3 = -c_1 + c_2$. *Rel. lin. entre colonnes si $m = 1$: 2 pts*
- Si $m = 2$, on déduit de (3) la relation linéaire $c_2 = 2c_1$. *Rel. lin. entre colonnes si $m = 2$: 2 pts*

Remarquons que, dans le cas $m = 2$, la forme normale échelonnée (4) a été obtenue après l'échange des colonnes c_2 et c_3. Cette forme permet également d'identifier la relation linéaire $c_2 = 2c_1$ à condition de tenir compte de cet échange. *Total ii. : 7 pts*

TOTAL QI : 20 PTS

Question II

i. Le déterminant d'ordre 2 est donné par

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$$

Expression de Δ_2 : 1 pt
Valeur de Δ_2 : 1 pt
Total i. : 2 pts

ii. Calculons ensuite le déterminant d'ordre n en appliquant la première loi des mineurs à la première colonne. On a

Application correcte de la première loi des mineurs : 2 pts

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$
$$= a\Delta_{n-1} + (n-1)(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Identification du terme $a\Delta_{n-1}$: 2 pts

En développant le déterminant d'ordre $n-1$ suivant la première ligne,il vient ensuite

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (n-1)(-1)^{n+1}(n-1)(-1)^{1+n-1} \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$
$$= a\Delta_{n-1} + (n-1)^2(-1)^{2n+1}a^{n-2}$$
$$= a\Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2}$$

Calculs et expression correcte de $f(n)$: 3 pts.

Pénalité de 1 pt si l'expression n'est pas simplifiée.

de sorte que

$$\alpha = a \quad \text{et} \quad f(n) = -a^{n-2}(n-1)^2$$

Total ii. : 7 pts

iii. La relation de récurrence obtenue permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Delta_n &= a\Delta_{n-1} - (n-1)^2 a^{n-2} \\ \Delta_{n-1} &= a\Delta_{n-2} - (n-2)^2 a^{n-3} \\ \Delta_{n-2} &= a\Delta_{n-3} - (n-3)^2 a^{n-4} \\ &\vdots \\ \Delta_3 &= a\Delta_2 - 4a \end{aligned}$$

Principe du travail "de proche en proche" : 1 pt

Ainsi, en prenant aussi en compte la valeur de Δ_2 calculée au point i., on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= a\left[a\Delta_{n-2} - (n-2)^2 a^{n-3}\right] - (n-1)^2 a^{n-2} \\
&= a^2\Delta_{n-2} - (n-2)^2 a^{n-2} - (n-1)^2 a^{n-2} \\
&= a^2\left[a\Delta_{n-3} - (n-3)^2 a^{n-4}\right] - (n-2)^2 a^{n-2} - (n-1)^2 a^{n-2} \\
&= a^3\Delta_{n-3} - (n-3)^2 a^{n-2} - (n-2)^2 a^{n-2} - (n-1)^2 a^{n-2} \\
&\quad \vdots \\
&= a^{n-2}\Delta_2 - 2^2 a^{n-2} - \cdots - (n-3)^2 a^{n-2} - (n-2)^2 a^{n-2} - (n-1)^2 a^{n-2} \\
&= a^{n-2}(a^2-1) - a^{n-2}\left[2^2 + \cdots + (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2\right] \\
&= a^n - a^{n-2}\left[1 + 2^2 + \cdots + (n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2\right] \\
&= a^n - a^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1} k^2
\end{aligned}$$

Expression de Δ_n en fonction de n : 2 pts dont 1 pt pour l'expression au moyen du symbole sommatoire

En utilisant le résultat

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

on obtient finalement, comme annoncé,

$$\Delta_n = a^n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}a^{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

Remarquons que, en particulier pour $n = 2$, cette expression permet de retrouver le résultat $\Delta_2 = a^2 - 1$.

Total iii. : 3 pts

TOTAL QII : 12 PTS

Question III

i. Puisque c et d sont des matrices-colonnes appartenant à $\mathbb{R}^n$, c est de dimensions $n \times 1$ et d^{T} est de dimensions $1 \times n$. Le produit cd^{T} est donc de dimensions $n \times n$.

Dimensions de cd^{T} : 1 pt.

La matrice A étant d'ordre n, il en va de même de son inverse A^{-1}. L'expression $\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$, en tant que produit de matrices de dimensions $1 \times n$, $n \times n$ et $n \times 1$ est donc un scalaire.

Dimensions de $\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$: 2 pts.

Total i. : 3 pts

ii. Il résulte de la définition du produit matriciel que

$$\left(\mathsf{cd}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = c_i d_j$$

Expression des éléments de cd^{T} : 1 pt

ou, plus explicitement, que

$$\mathsf{cd}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 & \ldots & c_1 d_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_n d_1 & \ldots & c_n d_n \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes du produit cd^{T} sont des multiples de la même matrice-colonne c. Le rang de la matrice, *i.e.* le nombre de colonnes linéairement indépendantes, est donc au plus égal à un.

Le rang de la matrice serait nul si toutes les colonnes étaient identiquement nulles. Ce n'est pas le cas puisque c et d sont non nulles et qu'il existe donc au moins un élément $c_i d_j \neq 0$ dans la matrice considérée. Dès lors, le rang de cd^{T} est égal à 1.

Rang correct (avec justification) : 3 pts, dont 1 pt pour écarter le cas $\rho = 0$.

Total ii. : 4 pts

iii. La formule de Sherman-Morrison fournit l'inverse de $\left(\mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)$ si le scalaire α est tel que

$$\left(\mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\right)=\mathbb{I}$$

Ecriture de $\mathsf{B}\mathsf{B}^{-1}=\mathbb{I}$ *: 1 pt*

Puisque la multiplication matricielle est associative et que $\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$ est un scalaire, on peut écrire successivement

Calcul du produit sans remarquer que $\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\in\mathbb{R}$ *: 1 pt*

$$\begin{aligned}
&\left(\mathsf{A}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\right)\\
&\quad=\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\left(\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1}\right)\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\mathsf{c}\left(\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right)\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\\
&\quad=\mathbb{I}+\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}+\alpha\,\left(\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right)\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\\
&\quad=\mathbb{I}+\left[1+\alpha(1+\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c})\right]\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}
\end{aligned}$$

Ce produit est égal à la matrice identité, comme souhaité, si

$$1+\alpha\left(1+\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\right)=0$$

Mise en évidence de $\mathsf{c}\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}$ *et conclusion : 3 pts*

Dans le cas où $1+\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}\neq 0$, il suffit donc de considérer

$$\alpha=-\frac{1}{1+\mathsf{d}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}}$$

Total iv. : 5 pts

TOTAL QIII : 12 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

L'opération élémentaire consistant à ajouter à une rangée d'une matrice une combinaison linéaire des autres rangées de cette matrice conserve certaines propriétés de la matrice comme son déterminant ou son rang. Si A' est obtenue à partir de A par une telle opération élémentaire, on peut donc écrire que $\det\mathsf{A}=\det\mathsf{A}'$ et que $\rho\left(\mathsf{A}\right)=\rho\left(\mathsf{A}'\right)$.

La matrice a par contre été modifiée par cette opération de sorte que $\mathsf{A}\neq\mathsf{A}'$. On ne peut donc égaler les matrices obtenues successivement en appliquant des opérations élémentaires.

Question I

i. La détermination du rang d'une matrice A peut être réalisée de différentes façons.
   - Le rang est égal au nombre de lignes/colonnes linéairement indépendantes de la matrice, ce qui n'est pas facile à identifier au premier abord, sans transformations élémentaires.
   - Le rang est égal à l'ordre de la plus grande matrice carrée non singulière que l'on peut extraire de A.
     Si le déterminant de la matrice A d'ordre 3 est différent de zéro, alors $\rho\left(\mathsf{A}\right)=3$.
     Si le déterminant de cette matrice est nul pour une valeur du paramètre, cela ne signifie pas automatiquement que son rang est égal à 2. On peut seulement en conclure que $\rho\left(\mathsf{A}\right)\leq 2$. Pour prouver que le rang vaut 2, il faut encore pouvoir extraire de A une matrice non singulière d'ordre 2.
   - La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées et en procédant avec ordre et méthode.

Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.

Si, comme dans cet exercice, les éléments de la matrice s'expriment en fonction d'un paramètre, une discussion intervient quand certaines valeurs du paramètre entraineraient une division par zéro. Il faut alors traiter séparément les matrices obtenues pour les valeurs particulières du paramètre.
La discussion en fonction du paramètre peut parfois être évitée ou retardée en échangeant les lignes ou les colonnes de la matrice. C'est le cas lorsque l'élément par lequel on devrait diviser (le 'pivot') comporte un paramètre et qu'une permutation permet de remplacer cet élément par un élément de valeur non nulle.

- Il faut être soigneux et systématique pour éviter les erreurs de calcul. Il convient également de ne pas vouloir aller trop vite en effectuant simultanément des transformations élémentaires qui dépendent l'une de l'autre. Par exemple, les manipulations simultanées $\ell_1' = \ell_1 + \ell_2$ et $\ell_2' = \ell_2 + \ell_1$ conduisant à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a+b \end{pmatrix}$$

ne sont pas licites ; elles modifient le rang de la matrice. Fondamentalement, les opérations élémentaires doivent être réalisées séquentiellement. Les opérations ne peuvent être regroupées dans une liste considérée en bloc que si les lignes (ou les colonnes) intervenant dans une opération élémentaire ne sont pas modifiées par une opération élémentaire précédente dans la liste.

ii.
- Quand le rang de la matrice A est égal à 3, ses colonnes sont linéairement indépendantes. Il n'y a donc pas de relation linéaire entre elles. Ce n'est que pour les valeurs du paramètre pour lesquelles le rang est inférieur à 3 que les colonnes sont linéairement dépendantes. Vu que le rang de la matrice vaut 2 pour les trois valeurs correspondantes du paramètre, il existe chaque fois une seule relation linéaire entre les colonnes.
- Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes. Si la forme normale échelonnée obtenue au point i. l'a été en effectuant uniquement des opérations sur les lignes, les relations entre les colonnes se lisent dans la matrice échelonnée.
- Si des opérations élémentaires ont été effectuées sur les colonnes pour échelonner la matrice, le nombre de relations linéaires entre les colonnes est inchangé mais l'expression de ces relations linéaires ne peut être obtenue à partir de la forme échelonnée obtenue de cette façon à l'exception du cas où seul un échange de colonnes a été effectué.

- Dans le cas $m = 0$, la deuxième colonne de la matrice est nulle, ce qui constitue la relation linéaire recherchée entre les colonnes. Dans ce cas, on peut en effet écrire

$$\lambda_1 \mathrm{c}_1 + \lambda_2 \mathrm{c}_2 + \lambda_3 \mathrm{c}_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \neq 0$$

Question II

La première loi des mineurs permettant le calcul d'un déterminant doit être correctement appliquée. En particulier, les valeurs des cofacteurs des éléments de la rangée choisie pour appliquer cette loi s'obtiennent en multipliant les mineurs correspondants par le facteur $(-1)^{i+j}$ où i et j sont les indices de la ligne et de la colonne qui se croisent au niveau de l'élément considéré.

i. Pour calculer Δ_2, il faut d'abord exprimer la matrice pour $n = 2$. L'observation de la dernière ligne et de la dernière colonne de la matrice donnée indique que celle-ci est d'ordre n et donc d'ordre 2 si $n = 2$, soit en remplaçant n par 2,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

ii.
- La relation devait être démontrée dans le cas général. Des exemples ($n = 3$ et $n = 4$) ne permettent pas de démontrer une relation générale.
- Il suffisait dans cet exercice d'appliquer la première loi des mineurs à la première colonne ou à la première ligne. Il n'était même pas nécessaire de faire apparaitre des zéros supplémentaires dans la matrice par des transformations élémentaires, la matrice donnée comportant déjà suffisamment de zéros.

iii.
- La relation de récurrence obtenue au point ii. peut être résolue en travaillant "de proche en proche" comme dans la solution-type, ce qui fait apparaitre une structure intéressante qui peut être exprimée de façon compacte au moyen d'une somme.
- Il était aussi possible de démontrer par récurrence que l'expression de Δ_n donnée dans l'énoncé était correcte. Dans ce cas, il faut bien respecter la structure de la démonstration.
  - ◇ Il faut commencer par vérifier le cas de base. Ce cas de base correspond à $n = 2$ et la formule donne $\Delta_2 = a^2 - 1$, valeur que nous avions calculée au point i.
  - ◇ Il faut ensuite démontrer le cas inductif, c'est-à-dire démontrer que, si la relation donnée est vraie pour n, elle est aussi vraie pour $n+1$. Le déterminant Δ_{n+1} peut être exprimé en fonction de Δ_n grâce à la formule établie au point ii.
  - ◇ Il ne faut enfin pas oublier de conclure que la relation est alors vraie $\forall n \geq 2$.

Question III

i. /

ii.
- Les éléments d'une matrice colonne peuvent être notés avec un seul indice, celui de leur ligne. Les élément de c sont donc simplement notés c_i, ce qui conduit à une notation plus compacte et plus lisible qu'une notation à deux indices de type $c_{i,1}$.
- Le rang d'une matrice d'ordre n ne vaut pas forcément n. Il peut être compris entre 0 et n suivant le nombre de colonnes (de lignes) linéairement indépendantes dans cette matrice. Dans cet exercice, toutes les lignes (les colonnes) étaient manifestement multiples de la même ligne (colonne). Le rang de la matrice

vaut donc au maximum 1 puisqu'elle contient au maximum une ligne (colonne) linéairement indépendante.

- Seule une matrice peuplée uniquement de zéros a un rang nul. Ce n'est pas le cas ici puisque les matrices colonnes c et d ne sont pas nulles, ce qui signifie qu'il existe au moins un éléments c_i de c et un élément d_j de d non nuls de sorte que l'élément $c_i d_j$ de $\mathsf{c}\mathsf{d}^T$ est non nul.

iii.
- Pour montrer qu'une matrice X est l'inverse d'une matrice B, il est généralement très peu efficace de calculer explicitement B^{-1} et de comparer le résultat à X. Il suffit de montrer que le produit $\mathsf{X}\mathsf{B} = \mathbb{I}$ ou, de façon équivalente, que $\mathsf{B}\mathsf{X} = \mathbb{I}$.
  Ici, il convenait donc de former le produit de B et de la forme présumée de son inverse pour identifier la valeur de α appropriée.
- Rappelons que l'inverse d'une somme de matrices n'est pas égale à la somme des inverses.
- Dans les développement des produits de matrices, il n'est pas permis de changer les matrices de place dans un produit : le produit matriciel n'est pas commutatif. Il n'est pas non plus permis de diviser par une matrice. Par contre, le produit $\mathsf{d}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{c}$ est un scalaire, comme cela a été démontré au point i. Il peut donc être manipulé comme tel et, par exemple, mis en évidence.