Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2019

MATH0013-1 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e) et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures trente.

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du* ***16 octobre****.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.uliege.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Calculez le déterminant de la matrice A d'ordre 3 dont les éléments sont donnés par

$$a_{k\ell} = e^{3ik\pi/(2\ell)}, \qquad k,\ \ell \in \{1,\ 2,\ 3\}$$

Question II

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \beta \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

où β désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu en fonction de β,

i. déterminez le rang de A ;
ii. le cas échéant, donnez la(les) relation(s) linéaire(s) existant entre les colonnes de A.

Question III

On considère les matrices $A \in \mathbb{C}^n_n$ et

$$B = \begin{pmatrix} iA & A \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

i. Déterminez le rang de B en fonction de celui de A.
ii. Si A est inversible, B est-elle inversible ? Si oui, déterminez l'expression de B^{-1} (sans utiliser les formules de Frobenius-Schur).
iii. Si A est hermitienne, B est-elle hermitienne ? Justifiez.
iv. Si A est normale, B est-elle normale ? Justifiez.

Question I

Ses éléments étant donnés par $a_{k\ell} = \mathrm{e}^{3ik\pi/(2\ell)}$, la matrice A s'écrit

Expression sous forme trigonométrique ou algébrique de la matrice : 1 pt

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3i\pi/2} & \mathrm{e}^{3i\pi/4} & \mathrm{e}^{3i\pi/6} \\ \mathrm{e}^{6i\pi/2} & \mathrm{e}^{6i\pi/4} & \mathrm{e}^{6i\pi/6} \\ \mathrm{e}^{9i\pi/2} & \mathrm{e}^{9i\pi/4} & \mathrm{e}^{9i\pi/6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3i\pi/2} & \mathrm{e}^{3i\pi/4} & \mathrm{e}^{i\pi/2} \\ \mathrm{e}^{3i\pi} & \mathrm{e}^{3i\pi/2} & \mathrm{e}^{i\pi} \\ \mathrm{e}^{9i\pi/2} & \mathrm{e}^{9i\pi/4} & \mathrm{e}^{3i\pi/2} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathrm{e}^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2} = i \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\,\sin\pi = -1$$

$$\mathrm{e}^{3i\pi/2} = \mathrm{e}^{i\pi/2}\,\mathrm{e}^{i\pi} = -i \qquad \mathrm{e}^{3i\pi} = \mathrm{e}^{i(\pi+2\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$$

$$\mathrm{e}^{9i\pi/2} = \mathrm{e}^{i(\pi/2+4\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi/2} = i$$

$$\mathrm{e}^{9i\pi/4} = \mathrm{e}^{i(\pi/4+2\pi)} = \mathrm{e}^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$\mathrm{e}^{3i\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

de sorte que

Méthode de calcul appropriée : 2 pts

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -i & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & i \\ -1 & -i & -1 \\ i & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & -i \end{pmatrix}$$

En ajoutant la troisième colonne à la première, on obtient

Valeur exacte du déterminant : 2 pts
Expression réelle : 1 pt

$$\det\mathsf{A} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & i \\ -2 & -i & -1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & -i \end{vmatrix} = -2(-1)^3 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) & i \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & -i \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[-i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) - i\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right] = 2\sqrt{2}$$

TOTAL QI : 6 PTS

Question II

Principe du calcul du rang, soit par réduction à une forme normale échelonnée, soit par extraction d'une matrice non singulière dont on a prouvé qu'elle était la plus grande possible : 3 pts

i. Soit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 5 \\ -1 & 4 & \beta \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée sans modifier son rang.

Commençons par échanger la première et la deuxième ligne, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & \beta \\ \beta & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

puis par multiplier la première ligne par -1,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -\beta \\ \beta & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement,

$$\begin{array}{r} \ell_2 \to \ell_2 - \beta\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -\beta \\ 0 & 1+4\beta & 5+\beta^2 \\ 0 & 11 & 5+3\beta \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \leftrightarrow \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -\beta \\ 0 & 11 & 5+3\beta \\ 0 & 1+4\beta & 5+\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2/11 \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & -\beta \\ 0 & 1 & \dfrac{5+3\beta}{11} \\ 0 & 1+4\beta & 5+\beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \ell_1 \to \ell_1 + 4\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - (1+4\beta)\ell_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{20+\beta}{11} \\ 0 & 1 & \dfrac{5+3\beta}{11} \\ 0 & 0 & \dfrac{-\beta^2-23\beta+50}{11} \end{pmatrix}$$

ou encore, en factorisant le dernier élément diagonal,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{20+\beta}{11} \\ 0 & 1 & \dfrac{5+3\beta}{11} \\ 0 & 0 & -\dfrac{(\beta-2)(\beta+25)}{11} \end{pmatrix}$$

Identification des cas particuliers $\beta = 2$ et $\beta = -25$: 1 pt

On peut dès lors distinguer les cas suivants :

Rang si $\beta \notin \{2, -25\}$ (avec justification) : 2 pts

- Si $\beta \neq 2$ et $\beta \neq -25$, la matrice A est non singulière et son rang vaut donc 3.
- Si $\beta = 2$, on obtient la forme normale échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

Rang si $\beta = 2$ (avec justification) : 2 pts

dont on déduit que le rang de A est égal à 2.

- Si $\beta = -25$, on obtient la forme normale échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/11 \\ 0 & 1 & -70/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\ddagger)$$

Rang si $\beta = -25$ (avec justification) : 2 pts

dont on déduit que le rang de A est égal à 2.

Total i. : 10 pts

ii. Les opérations élémentaires effectuées ci-dessus portant exclusivement sur les lignes de la matrice, elles ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. En considérant les formes normales échelonnées obtenues, on peut donc obtenir les conclusions suivantes.

Méthode/principe approprié : 1 pt

- Si $\beta = 2$, la forme normale échelonnée (†) montre que les colonnes de A sont reliées par la relation linéaire
$$\mathsf{c}_3 = 2\mathsf{c}_1 + \mathsf{c}_2$$

Relation entre les colonnes si $\beta = 2$: 2 pts

- Si $\beta = -25$, on déduit de (‡) la relation linéaire
$$\mathsf{c}_3 = -(5/11)\mathsf{c}_1 - (70/11)\mathsf{c}_2$$
soit
$$5\mathsf{c}_1 + 70\mathsf{c}_2 + 11\mathsf{c}_3 = 0$$

Relation entre les colonnes si $\beta = -25$: 2 pts

- Dans les autres cas, les colonnes de A sont linéairement indépendantes, *i.e.* il n'existe pas de relation linéaire entre celles-ci.

Pas de relation linéaire si $\beta \notin \{2, -25\}$: 1 pt

Total ii. : 6 pts

TOTAL QII : 16 PTS

Question III

i. Des n premières lignes de la matrice B, soustrayons i fois les n dernières, ce qui conduit à

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - i\ell_{n+1} \\ \ell_2 \to \ell_2 - i\ell_{n+2} \\ \quad\vdots \\ \ell_n \to \ell_n - i\ell_{2n} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Ces opérations élémentaires ne modifient pas le rang de la matrice de sorte que

$$\rho(\mathsf{B}) = \rho\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Rang de B correct : 2 pts
Justification : 1 pt

Ceci permet de conclure que
$$\rho(\mathsf{B}) = 2\,\rho(\mathsf{A})$$
En effet, si $m = \rho(\mathsf{A})$, il y a m lignes linéairement indépendantes parmi les n premières lignes de cette matrice réduite de même que parmi les n dernières. Par ailleurs, les n premières lignes et les n dernières sont manifestement indépendantes entre elles vu la présence des blocs de zéros. Finalement, on a bien $2m$ lignes linéairement indépendantes de sorte que $\rho(\mathsf{B}) = 2m = 2\rho(\mathsf{A})$.

Total i. : 3 pts

ii. Si A est inversible, $\rho(\mathsf{A}) = n$ de sorte que $\rho(\mathsf{B}) = 2n$ et B est aussi inversible.
Pour calculer B^{-1}, nous allons travailler par blocs. Nous recherchons donc la matrice
$$\begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{E} & \mathsf{F} \end{pmatrix}$$

Justification de la non-singularité de B explicitement ou par le calcul de B^{-1} : 1 pt
Partition de B en 4 blocs : 1 pt

où les blocs C, D, E et F sont des matrices d'ordre n, telles que

Condition $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{B} = \mathbb{I}$ (ou $\mathsf{BB}^{-1} = \mathbb{I}$) : 1 pt

$$\begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{E} & \mathsf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} i\mathsf{CA} + \mathsf{DA} & \mathsf{CA} \\ i\mathsf{EA} + \mathsf{FA} & \mathsf{EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

ou encore, en égalant les blocs qui se correspondent,

Évaluation du produit matriciel et égalité des blocs correspondants : 2 pts

$$\begin{cases} (i\mathsf{C} + \mathsf{D})\mathsf{A} = \mathbb{I}_n \\ \mathsf{CA} = 0 \\ (i\mathsf{E} + \mathsf{F})\mathsf{A} = 0 \\ \mathsf{EA} = \mathbb{I}_n \end{cases}$$

Si A est inversible, A^{-1} existe et, multipliant à droite la deuxième équation par A^{-1}, on obtient

$$\mathsf{CAA}^{-1} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathsf{C}\mathbb{I}_n = \mathsf{C} = 0$$

La première équation s'écrit alors $\mathsf{DA} = \mathbb{I}_n$ de sorte que $\mathsf{D} = \mathsf{A}^{-1}$.
La quatrième équation conduit également à $\mathsf{E} = \mathsf{A}^{-1}$.
La troisième équation donne quant à elle successivement

$$\begin{aligned} (i\mathsf{A}^{-1} + \mathsf{F})\mathsf{A} &= 0 \\ (i\mathsf{A}^{-1} + \mathsf{F})\mathsf{AA}^{-1} &= 0 \\ (i\mathsf{A}^{-1} + \mathsf{F})\mathbb{I}_n &= 0 \\ \mathsf{F} &= -i\mathsf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Finalement,

Résolution et expression correcte de l'inverse : 4 pts

$$\mathsf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{A}^{-1} \\ \mathsf{A}^{-1} & -i\mathsf{A}^{-1} \end{pmatrix}$$

Total ii. : 9 pts

iii. La matrice B est hermitienne si $\mathsf{B}^* = \mathsf{B}$. On a

Connaissance du concept de matrice hermitienne : 1 pt

$$\mathsf{B}^* = \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{i\mathsf{A}} & \overline{\mathsf{A}} \\ \overline{\mathsf{A}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -i\overline{\mathsf{A}} & \overline{\mathsf{A}} \\ \overline{\mathsf{A}} & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -i\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix} \qquad (\heartsuit)$$

Expression correcte de B^* : 3 pts, dont 1 pt pour l'utilisation de l'hypothèse sur A

Ensuite, puisque A est hermitienne et donc que $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$,

$$\mathsf{B}^* = \begin{pmatrix} -i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{B}$$

de sorte que la matrice B n'est pas hermitienne (sauf si $\mathsf{A} = 0$).

Conclusion : 1 pt

Total iii. : 5 pts

iv. La matrice B est normale si $\mathsf{B}^*\mathsf{B} = \mathsf{BB}^*$. En utilisant l'expression de la matrice B^* obtenue en ($\heartsuit$) et en effectuant le produit matriciel par blocs, on calcule

Connaissance du concept de matrice normale : 1 pt

$$\mathsf{B}^*\mathsf{B} = \begin{pmatrix} -i\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\mathsf{A}^* i\mathsf{A} + \mathsf{A}^*\mathsf{A} & -i\mathsf{A}^*\mathsf{A} \\ i\mathsf{A}^*\mathsf{A} & \mathsf{A}^*\mathsf{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathsf{A}^*\mathsf{A} & -i\mathsf{A}^*\mathsf{A} \\ i\mathsf{A}^*\mathsf{A} & \mathsf{A}^*\mathsf{A} \end{pmatrix}$$

De même, on a

Expression correcte de $\mathsf{B}^*\mathsf{B}$: 1 pt

$$\mathsf{BB}^* = \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\mathsf{A}^* & \mathsf{A}^* \\ \mathsf{A}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\mathsf{A}i\mathsf{A}^* + \mathsf{AA}^* & i\mathsf{AA}^* \\ -i\mathsf{AA}^* & \mathsf{AA}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathsf{AA}^* & i\mathsf{AA}^* \\ -i\mathsf{AA}^* & \mathsf{AA}^* \end{pmatrix}$$

Expression correcte de BB^* : 1 pt

Utilisation de l'hypothèse sur A : 1 pt ou encore, puisque A est normale et vérifie donc $\mathsf{AA}^* = \mathsf{A}^*\mathsf{A}$,

$$\mathsf{BB}^* = \begin{pmatrix} 2\mathsf{A}^*\mathsf{A} & i\mathsf{A}^*\mathsf{A} \\ -i\mathsf{A}^*\mathsf{A} & \mathsf{A}^*\mathsf{A} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathsf{B}^*\mathsf{B} \neq \mathsf{BB}^*$ de sorte que la matrice B n'est pas normale (sauf si $\mathsf{A} = 0$).

Conclusion : 1 pt
Total iv. : 5 pts
P.S. Pas de point pour l'identification du cas particulier $\mathsf{A} = 0$ *en iii. et iv.*
TOTAL QIII : 22 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

L'opération élémentaire consistant à ajouter à une rangée d'une matrice une combinaison linéaire des autres rangées de cette matrice conserve certaines propriétés de la matrice comme son déterminant ou son rang. Si A' est obtenue par cette transformation élémentaire, on peut donc écrire que $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{A}'$ et que $\rho(\mathsf{A}) = \rho(\mathsf{A}')$.

La matrice a par contre été modifiée par cette opération de sorte que $\mathsf{A} \neq \mathsf{A}'$. On ne peut donc égaler les matrices obtenues successivement en appliquant des opérations élémentaires. On ne peut pas non plus utiliser la forme transformée pour calculer l'inverse de la matrice de départ, *i.e.* $\mathsf{A}^{-1} \neq (\mathsf{A}')^{-1}$.

Question I

- Dans l'expression $a_{k\ell}$ des éléments de la matrice, k représente l'indice de la ligne et ℓ l'indice de la colonne. Considérer le contraire conduit à la matrice transposée de A. Même si l'erreur ne porte pas à conséquence dans cet exercice particulier puisque $\det \mathsf{A} = \det \mathsf{A}^{\mathrm{T}}$, il pourrait en être tout à fait autrement dans d'autres exercices. Il faut donc être attentif à bien traduire et respecter l'énoncé.
- Il était judicieux dans cet exercice de commencer par évaluer la forme algébrique des exponentielles imaginaires afin de faire apparaitre d'éventuelles similitudes entre les rangées. Cette écriture met en évidence l'intérêt d'ajouter la troisième colonne à la première, ce qui fait apparaitre deux zéros dans la première colonne et facilite grandement le calcul du déterminant.

  Lors du calcul du déterminant d'une matrice qui ne comporte pas beaucoup d'éléments nuls, il est opportun d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes pour faire apparaitre des zéros et éviter ainsi de longs calculs et les éventuelles erreurs qui les accompagnent. Il ne faut cependant pas oublier que la multiplication d'une rangée de la matrice par un certain facteur multiplie le déterminant par ce même facteur.
- Les connaissances mathématiques de base sont indispensables pour traiter les problèmes d'algèbre, en particulier ici la manipulation des exponentielles et les calculs sur les nombres complexes. On a, par exemple,

  $$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b \quad \text{et pas} \quad \mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b$$

  de sorte que la deuxième ligne de la matrice n'est pas égale au double de la première.

Question II

i. La détermination du rang d'une matrice A peut être réalisée de différentes façons.
   - Le rang est égal au nombre de lignes/colonnes linéairement indépendantes de la matrice, ce qui n'est pas facile à identifier au premier abord, sans transformations élémentaires.
   - Le rang est égal à l'ordre de la plus grande matrice carrée non singulière que l'on peut extraire de A.
     Si le déterminant de la matrice A d'ordre 3 est différent de zéro, alors $\rho(A) = 3$.
     Si le déterminant de cette matrice est nul pour une valeur du paramètre, cela ne signifie pas automatiquement que son rang est égal à 2. On peut seulement en conclure que $\rho(A) \leq 2$. Pour prouver que le rang vaut 2, il faut encore pouvoir extraire de A une matrice non singulière d'ordre 2.
   - La méthode la plus systématique pour déterminer le rang d'une matrice est de la réduire à une forme normale échelonnée en effectuant des opérations élémentaires sur ses rangées et en procédant avec ordre et méthode.
     Il faut toujours commencer par faire apparaitre un élément égal à 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice, soit en échangeant des lignes, soit en divisant la première ligne par son premier élément. Il faut ensuite faire apparaitre des zéros en dessous de ce 1 en ajoutant aux autres lignes le multiple adéquat de la première. On passe ensuite à la deuxième colonne où l'élément égal à 1 sur la diagonale principale est obtenu en divisant la deuxième ligne par l'élément qui s'y trouve (Quand un élément nul se trouve sur la diagonale principale, il est indispensable d'échanger des colonnes, ce qui ne modifie pas le rang.). Les zéros aux autres places de la deuxième colonne s'obtiennent comme dans la première colonne en ajoutant aux différentes lignes le multiple adéquat de la deuxième ligne... En procédant de la sorte, on conserve les zéros obtenus précédemment. La procédure s'arrête quand une matrice identité occupe le coin supérieur gauche et qu'il n'y a plus que des lignes de zéros en dessous de celle-ci. Le rang de la matrice est alors égal à l'ordre de la matrice identité du coin supérieur gauche de la forme normale échelonnée.
     Si, comme dans cet exercice, les éléments de la matrice s'expriment en fonction d'un paramètre, une discussion intervient quand certaines valeurs du paramètre entraineraient une division par zéro. Il faut alors traiter séparément les matrices obtenues pour les valeurs particulières du paramètre.

ii. - Quand le rang de la matrice A est égal à 3, ses colonnes sont linéairement indépendantes. Il n'y a donc pas de relation linéaire entre elles. Ce n'est que pour les valeurs du paramètre pour lesquelles le rang est inférieur à 3 que les colonnes sont linéairement dépendantes. Vu que le rang de la matrice vaut 2 pour les deux valeurs correspondantes du paramètre, il existe chaque fois une seule relation linéaire entre les colonnes.
   - Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes. Si la forme normale échelonnée obtenue au point i. l'a été en effectuant uniquement des opérations sur les lignes, les relations entre les colonnes se lisent dans la matrice échelonnée.
   - Si des opérations élémentaires ont été effectuées sur les colonnes pour échelonner la matrice, le nombre de relations linéaires entre les colonnes est inchangé mais l'expression de ces relations linéaires ne peut être obtenue à partir de la forme échelonné obtenue de cette façon.

Question III

Toutes les opérations sur les matrices ne peuvent être appliquées à une matrice définie par blocs comme si les blocs étaient de simples éléments de la matrice.

- Le produit par blocs de deux matrices partitionnées en blocs n'est possible que si les dimensions des blocs se correspondent, c'est-à-dire qu'ils permettent d'effectuer les produits et les sommes qui en résultent.
- On ne peut généraliser l'expression du déterminant d'une matrice d'ordre 2 à une matrice définie par blocs, *i.e.*

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{vmatrix} \neq \det \mathsf{A} \det \mathsf{D} - \det \mathsf{B} \det \mathsf{C}$$

  Dans le cas proposé, si on souhaitait calculer le déterminant, la méthode la plus simple était d'échanger les deux colonnes de blocs pour obtenir une matrice triangulaire supérieure, dont on sait par contre calculer le déterminant selon

$$\begin{vmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} \mathsf{A} & i\mathsf{A} \\ 0 & \mathsf{A} \end{vmatrix} = (-1)^n (\det \mathsf{A})^2$$

  où le facteur $(-1)^n$ vient de ce qu'il y a eu n échanges de colonnes.
- Lorsqu'on calcule la transposée d'une matrice définie par blocs, il ne suffit pas d'échanger les lignes et les colonnes de blocs, il faut également transposer chacun des blocs, soit

$$\begin{pmatrix} \mathsf{W} & \mathsf{X} \\ \mathsf{Y} & \mathsf{Z} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathsf{W}^{\mathrm{T}} & \mathsf{Y}^{\mathrm{T}} \\ \mathsf{X}^{\mathrm{T}} & \mathsf{Z}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

- Le calcul de l'inverse d'une matrice définie par blocs ne peut pas s'effectuer en généralisant la première loi des mineurs.

i. Il s'agissait ici de déterminer $\rho(\mathsf{B})$ en fonction de $\rho(\mathsf{A})$, sans supposer que $\rho(\mathsf{A}) = n$.

ii. Le caractère inversible de B pouvait se déduire du point i. Il est à noter cependant que le seul fait de déterminer B^{-1}, dont tous les blocs sont définis, telle que $\mathsf{B}\mathsf{B}^{-1} = \mathbb{I}$ prouve que B est inversible.

   Il était explicitement demandé de ne pas utiliser les formules de Frobenius-Schur pour déterminer l'inverse de B. Ces formules ne sont pas à retenir. Pour déterminer l'inverse recherchée, il convenait par contre de travailler par blocs et de résoudre le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \mathsf{C} & \mathsf{D} \\ \mathsf{E} & \mathsf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\mathsf{A} & \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

   pour les matrices (d'ordre n) C, D, E, et F.

   Pour déterminer l'inconnue X apparaissant dans l'équation matricielle $\mathsf{AX} = \mathsf{Y}$ où A est inversible, il suffit de multiplier à gauche chaque membre de l'équation par A^{-1}, ce qui donne $\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{Y}$ et non $\mathsf{X} = \mathsf{Y}\mathsf{A}^{-1}$.

iii. Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués. On a donc

$$(i\mathsf{A})^* = -i\mathsf{A}^* \neq i\mathsf{A}^*$$

iv. Les différentes sous-questions sont bien séparées. Au point iv., la matrice A n'est pas hermitienne comme au point iii. Elle est seulement normale et n'est donc pas égale à son adjointe.