Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2018

MATH0013-1 - ALGÈBRE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Algèbre. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e) et sans interrompre votre travail. Ce test devrait pouvoir être réalisé dans un délai maximum de deux heures.

- *Rédigez vos réponses aux trois questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *et votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors de la séance d'exercices du* ***21 novembre****.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
`www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation`

Question I

Montrez que, $\forall \mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} \in \mathcal{E}$, le produit mixte des vecteurs $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ et $\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}$ est égal au carré du produit mixte de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, c'est-à-dire

$$[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$$

Question II

Soit $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ $(n \geq 2)$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$. Montrez que les vecteurs $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ définis par

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_n \\ \mathbf{b}_k &= \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{k-1}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

forment une base de l'enveloppe linéaire des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ si n est impair.

Question III

Résolvez et discutez en fonction du paramètre réel β :

$$\begin{cases} \beta x + y - \beta z = \beta \\ x + 2y - \beta z = 2\beta \\ -x - \beta y + 2z = -2 - \beta \end{cases}$$

SOLUTION TYPE

Question I

On a

$$[\mathbf{a}\wedge\mathbf{b},\mathbf{b}\wedge\mathbf{c},\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}] = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\{(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\}$$

Connaissance du produit mixte : 1 pt

où le produit vectoriel entre accolades peut être considéré comme le double produit vectoriel des vecteurs **b**, **c** et $\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}$, soit

Connaissance du double produit vectoriel : 1 pt

$$\{(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\wedge(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\} = \mathbf{c}\{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\} - \mathbf{b}\{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\} = \mathbf{c}\{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\} = \mathbf{c}\{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}$$

en effectuant une permutation circulaire dans le produit mixte des vecteurs **a**, **b** et **c**.

Démonstration : 3 pts

On obtient alors

$$[\mathbf{a}\wedge\mathbf{b},\mathbf{b}\wedge\mathbf{c},\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}] = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\} = \{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}^2 = [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2$$

TOTAL QI : 5 PTS

Question II

Les vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ étant linéairement indépendants, leur enveloppe linéaire est de dimension n et un ensemble de n vecteurs de cette enveloppe en constitue une base si ces n vecteurs sont linéairement indépendants.

Conditions pour avoir une base : n vecteurs et indépendance linéaire : 2 pts

Les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ appartiennent à l'enveloppe linéaire et sont au nombre de n. Il nous suffit donc, pour répondre à la question posée, de montrer qu'ils sont linéairement indépendants si n est impair, *i.e.* que

Condition pour l'indépendance linéaire : 2 pts (v1)

$$\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} + \lambda_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

La combinaison linéaire nulle peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_n) + \lambda_2(\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_1) + \ldots + \lambda_{n-1}(\mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{a}_{n-2}) + \lambda_n(\mathbf{a}_n+\mathbf{a}_{n-1}) = \mathbf{0}$$

ou encore

$$(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{a}_1 + (\lambda_2+\lambda_3)\mathbf{a}_2 + \ldots + (\lambda_{n-1}+\lambda_n)\mathbf{a}_{n-1} + (\lambda_1+\lambda_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sont linéairement indépendants, ceci n'est possible que si

Démonstration : 3 pts (v1)

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}+\lambda_n = 0 \\ \lambda_1+\lambda_n = 0 \end{cases} \tag{$\heartsuit$}$$

c'est-à-dire si

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = (-1)^{n-1}\lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1 = -\lambda_n$$

Si n est impair, on a donc simultanément

$$\lambda_1 = \lambda_n \quad \text{et} \quad \lambda_1 = -\lambda_n$$

de sorte que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

Ceci montre que les vecteurs $\mathbf{b}_1$, ..., $\mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants si n est impair et constituent une base de l'enveloppe linéaire des vecteurs $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$.

TOTAL QII : 7 PTS

De façon alternative, on peut montrer que les vecteurs $\mathbf{b}_1$, ..., $\mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants si n est impair en considérant le déterminant de la matrice (construite colonne par colonne) des composantes de ces vecteurs dans la base des $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_n$ soit, en développant selon la première colonne,

Condition pour l'indépendance linéaire : 2 pts (v2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Le déterminant étant non nul si n est impair, on en déduit que les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes et, avec elles, les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$.

Démonstration : 3 pts (v2)

Remarquons que le déterminant ci-dessus est celui de la matrice des coefficients du système (♡) vérifié par les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Le fait que ce déterminant diffère de zéro lorsque n est impair assure l'unicité de la solution de (♡). Ce système étant homogène, la solution unique correspond à la solution triviale $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Question III

Le système peut s'écrire sous la forme matricielle $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ où

Écriture du système sous forme matricielle ($\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ ou $[\mathsf{A}, \mathsf{b}]$) : 1 pt

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1 & -\beta \\ 1 & 2 & -\beta \\ -1 & -\beta & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ -2-\beta \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en transformant en une forme normale échelonnée la matrice augmentée

$$[\mathsf{A}, \mathsf{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1 & -\beta & \beta \\ 1 & 2 & -\beta & 2\beta \\ -1 & -\beta & 2 & -2-\beta \end{array}\right)$$

Par une permutation circulaire des lignes, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\beta & 2\beta \\ -1 & -\beta & 2 & -2-\beta \\ \beta & 1 & -\beta & \beta \end{array}\right)$$

Ensuite, en remplaçant ℓ_2 par $\ell_2 + \ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - \beta\ell_1$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\beta & 2\beta \\ 0 & 2-\beta & 2-\beta & \beta-2 \\ 0 & 1-2\beta & \beta^2-\beta & \beta-2\beta^2 \end{array}\right) \qquad (\dagger)$$

A) Si $\beta \neq 2$, on peut diviser ℓ_2 par $2-\beta$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -\beta & 2\beta \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-2\beta & \beta^2-\beta & \beta-2\beta^2 \end{array}\right)$$

puis, en ajoutant $(2\beta-1)\ell_2$ à ℓ_3 et en soustrayant $2\ell_2$ à ℓ_1,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\beta-2 & 2\beta+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \beta^2+\beta-1 & -2\beta^2-\beta+1 \end{array}\right) \tag{‡}$$

A.1) Si $\beta^2+\beta-1 \neq 0$ c'est-à-dire si $\beta \neq \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, on divise ℓ_3 par $\beta^2+\beta-1$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\beta-2 & 2\beta+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2\beta^2-\beta+1}{\beta^2+\beta-1} \end{array}\right)$$

Remplaçant ensuite ℓ_2 par $\ell_2-\ell_3$ et ℓ_1 par $\ell_1+(\beta+2)\ell_3$, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{-\beta^2-\beta}{\beta^2+\beta-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{\beta^2}{\beta^2+\beta-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{-2\beta^2-\beta+1}{\beta^2+\beta-1} \end{array}\right)$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\beta^2-\beta}{\beta^2+\beta-1} \\ \dfrac{\beta^2}{\beta^2+\beta-1} \\ \dfrac{-2\beta^2-\beta+1}{\beta^2+\beta-1} \end{pmatrix}$$

La solution est unique si $\beta \notin \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2\}$: 2 pts
Valeur de la solution unique : 2 pts

A.2) Si $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, (‡) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\beta-2 & 2\beta+2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2\beta^2-\beta+1 \end{array}\right)$$

où

$$-2\beta^2-\beta+1 = -2\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+1 = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \neq 0$$

et le système est incompatible.

Le système est incompatible si $\beta \in \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$: 2 pts

B) Si $\beta = 2$, (†) devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

Pour échelonner cette matrice, on permute ℓ_2 et ℓ_3 puis on multiplie ℓ_2 par $-1/3$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustrayant $2\ell_2$ à ℓ_1, on obtient finalement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de sorte que

Solution si $\beta = 2$: 3 pts

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

TOTAL QIII : 10 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- Le respect des notations introduites dans le cours est important. En particulier, il est indispensable de souligner **tous** les vecteurs et de réserver le point aux produits scalaires. La précision dans les notations est un élément essentiel pour permettre de distinguer aisément la nature scalaire ou vectorielle des opérandes et d'appliquer ainsi les règles et propriétés appropriées.
  Dans l'expression
  $$\mathbf{c}\{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$$
  par exemple, le terme entre accolades est un scalaire. Dès lors il peut être mis en évidence pour transformer l'expression selon
  $$\mathbf{c}\{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = \{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\}\{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\} = \{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\}^2$$
  Par contre,
  $$\{\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\}^2 \neq \mathbf{c}^2(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^2$$
  en considérant indûment que les différents facteurs sont des scalaires.

  Notons par ailleurs que l'écriture $\mathbf{c}^2$ n'est pas correcte. Il faut lui préférer $\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}$ ou $\|\mathbf{c}\|^2$.
- Il était possible de démontrer la propriété proposée en exprimant tous les vecteurs au moyen de leurs composantes dans une base orthonormée. Indépendamment de la longueur des développements, ceci n'est cependant pas à encourager. Il est essentiel de pouvoir s'approprier les différentes règles de manipulation des différents produits (scalaire, vectoriel et mixte) en conservant la généralité du formalise vectoriel.

Question II

- Il faut répondre aux questions posées. Envisager seulement le cas particulier $n = 3$ ne répond pas à la question posée ; un exemple qui vérifie l'énoncé ne constitue pas une démonstration.
- Il était aussi inutile d'envisager le cas où n est pair : ce n'était pas demandé. Envisager des cas qui sont explicitement écartés dans l'énoncé ne contribue pas à la réponse et risque d'impliquer des développements ou raisonnements inutilement complexes.
- La définition de l'indépendance linéaire doit être écrite correctement, sans oublier l'implication sur les coefficients $\lambda_i, (i = 1, \ldots, n)$. Les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

- Il est faux de prétendre que "*toutes les combinaisons linéaires de vecteurs linéairement indépendants sont elles-mêmes linéairement indépendantes*" comme on le retrouve sur de nombreuses copies. Considérons pour s'en convaincre deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ linéairement indépendants. Les vecteurs $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ et $2\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ obtenus par combinaison linéaire de ceux-ci ne sont évidemment pas linéairement indépendants.

Question III

La méthode de résolution des systèmes linéaires n'est pas imposée. Il est cependant **fortement conseillé** d'utiliser la méthode de Gauss-Jordan (§3.7.1 des notes de cours) basée sur la réduction à une forme normale échelonnée de la matrice du système. Cette méthode permet de résoudre de façon tout à fait systématique tous les types de systèmes linéaires, quels que soient les nombres d'équations, d'inconnues, de paramètres... La méthode permet également l'identification des systèmes incompatibles. Elle donne aussi une solution dont l'expression met très clairement en évidence le rang de l'application linéaire ainsi que son noyau et les dimensions de celui-ci.

- Dans le cadre d'une résolution de système linéaire, l'échelonnage de la matrice ne peut être réalisé qu'en faisant des manipulations élémentaires sur les lignes de la matrice, ce qui ne modifie pas les équations du système. Seuls des échanges de colonnes sont permis mais doivent s'accompagner de l'échange des inconnues correspondantes.
- La permutation initiale des lignes amenant un 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice permet de ne pas induire une discussion inutile venant de la division par β de la première ligne. Il faut toujours essayer de retarder le plus possible les opérations conduisant à une discussion. Le cas $\beta = 0$ ne constituait pas ici un cas particulier mais correspondait à la solution unique obtenue pour

$$\beta \notin \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2\}$$

- La méthode d'écriture du noyau de l'application linéaire doit être appliquée correctement. Il faut exprimer celui-ci en prenant une combinaison linéaire des colonnes de la matrice réduite se trouvant à droite de la matrice identité, en changeant le signe des éléments et en remplaçant successivement les 0 par des 1 sur les lignes de zéros se trouvant sous la matrice identité.
- Il est possible de vérifier les solutions obtenues en remplaçant celles-ci dans le système. Il faut toujours privilégier les méthodes de vérification qui ne consistent pas juste à relire la solution rédigée.