LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2022

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez dans le coin supérieur gauche de chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Simplifiez au maximum l'expression

$$\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

si **a** et **b** sont des vecteurs unitaires mutuellement orthogonaux de l'espace physique $\mathcal{E}$.

ii. L'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n constitue-t-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe construit sur $\mathbb{C}^n_n$? Justifiez.

iii. Soit M une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On dit que $\mathsf{u}\in\mathbb{R}^n$ est conjugué à $\mathsf{v}\in\mathbb{R}^n$ par rapport à M si $\mathsf{u}^T\mathsf{M}\mathsf{v}=0$.
   (a) Montrez que si u est conjugué à v par rapport à M, alors v est conjugué à u par rapport à M.
   (b) Justifiez l'existence et l'unicité de la solution du problème linéaire $\mathsf{M}\mathsf{x}=\mathsf{b}$ quel que soit $\mathsf{b}\in\mathbb{R}^n$.
   (c) Montrez que si a_1, $\mathsf{a}_2,\ldots,$ a_n sont des éléments non nuls de $\mathbb{R}^n$ conjugués deux à deux, alors a_1, $\mathsf{a}_2,\ldots,$ a_n forment une base de $\mathbb{R}^n$.
   (d) Si les a_1, $\mathsf{a}_2,\ldots,$ a_n sont non nuls et conjugués deux à deux par rapport à M et si $\mathsf{b}\in\mathbb{R}^n$, déterminez l'expression de la solution x du système $\mathsf{M}\mathsf{x}=\mathsf{b}$ comme combinaison linéaire des a_1, $\mathsf{a}_2,\ldots,$ a_n.

Question II

On considère la matrice

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

i. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
ii. La matrice A est-elle diagonalisable par une transformation de similitude ? Justifiez.
iii. La matrice A admet-elle une décomposition LU unique ? Justifiez.

Question III

Résolvez le système ci-dessous dans $\mathbb{R}$ en discutant s'il y a lieu en fonction du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\lambda x+2\lambda y+4z=1\\ x+\lambda y+2(\lambda-1)z=2\end{cases}$$

SOLUTION TYPE

Question I

i. En exploitant la formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned}\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\Big]&\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &=\Big[\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})-\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\Big]\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &=(\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ &=2\end{aligned}$$

puisque, **a** et **b** étant unitaires,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2=1\quad\text{et}\quad\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|^2=1$$

et, **a** et **b** étant orthogonaux,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=0$$

ii. L'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n constitue un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n_n$ s'il est non vide et s'il contient les combinaisons linéaires de ses éléments.

Considérons les matrices hermitiennes A et $\mathsf{B}\in\mathbb{C}^n_n$ et vérifions si la matrice $\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B}$ est hermitienne pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, c'est-à-dire si

$$(\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B})^*=(\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B})\qquad(\diamondsuit)$$

Puisque A et B sont hertitiennes, on a $\mathsf{A}^*=\mathsf{A}$ et $\mathsf{B}^*=\mathsf{B}$, de sorte que

$$(\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B})^*=\overline{\alpha}\mathsf{A}^*+\overline{\beta}\mathsf{B}^*=\overline{\alpha}\mathsf{A}+\overline{\beta}\mathsf{B}$$

En injectant cette expression dans ($\diamondsuit$), on aboutit à la condition

$$\overline{\alpha}\mathsf{A}+\overline{\beta}\mathsf{B}=\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B}$$

qui ne peut être rencontrée quels que soient α et $\beta\in\mathbb{C}^n_n$. Par exemple, elle n'est pas remplie si $\alpha=i$, $\beta=0$ et A est non nulle.

L'ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n ne constitue donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n_n$.

iii. (a) Si u est conjugué à v par rapport à M, alors

$$0=\mathsf{u}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\mathsf{v}$$

Donc, en transposant cette relation et puisque M est symétrique,

$$0=\left(\mathsf{u}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\mathsf{v}\right)^{\mathrm{T}}=\mathsf{v}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}^{\mathrm{T}}(\mathsf{u}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathsf{v}^{\mathrm{T}}\mathsf{M}\mathsf{u}$$

ce qui démontre que v est conjugué à u par rapport à M.

(b) La matrice M étant symétrique définie positive, son déterminant est strictement positif. Dès lors, M est inversible et le système linéaire proposé possède la solution unique $\mathsf{x}=\mathsf{M}^{-1}\mathsf{b}$ quel que soit $\mathsf{b}\in\mathbb{R}^n$.

(c) Les éléments proposés étant en nombre égal à la dimension de l'espace, soit n, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$ s'ils sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si

$$\lambda_1\mathsf{a}_1+\lambda_2\mathsf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathsf{a}_n=0\qquad\Rightarrow\qquad\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

Multipliant la combinaison linéaire par la matrice M, on obtient

$$\lambda_1\mathsf{M}\mathsf{a}_1+\lambda_2\mathsf{M}\mathsf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathsf{M}\mathsf{a}_n=0$$

Ensuite, multipliant par $\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}}$ ($i \in \{1,2,...,n\}$),

$$\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}}(\lambda_1 \mathsf{M}\mathsf{a}_1 + \lambda_2 \mathsf{M}\mathsf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{M}\mathsf{a}_n) = \lambda_i \mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}\mathsf{a}_i = 0$$

puisque les éléments sont conjugués deux à deux.
La matrice M étant définie positive et les éléments a_i non nuls, on a

$$\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}\mathsf{a}_i > 0$$

de sorte que

$$\lambda_i = 0$$

Les n éléments constituent donc une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Le système à résoudre $\mathsf{M}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ peut encore s'écrire, en exprimant la solution dans la base des a_i,

$$\mathsf{M}(x_1 \mathsf{a}_1 + x_2 \mathsf{a}_2 + \cdots x_n \mathsf{a}_n) = \mathsf{b}$$

Multipliant cette relation par $\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}}$, on a

$$\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}(x_1 \mathsf{a}_1 + x_2 \mathsf{a}_2 + \cdots x_n \mathsf{a}_n) = \mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{b}$$

soit, puisque les a_i sont conjugués deux à deux par rapport à M,

$$x_i(\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}\mathsf{a}_i) = \mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{b}$$

de sorte que, $\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}\mathsf{a}_i$ étant non nul, les composantes de la solution du système dans la base des a_i sont

$$x_i = \frac{\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{b}}{\mathsf{a}_i{}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}\mathsf{a}_i}, \quad \forall i \in \{1,2,...,n\}$$

Question II

i. Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant se calcule suivant

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} && (l_1 \to l_1 + l_3) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} && (c_3 \to c_3 - c_1) \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

La matrice A admet donc la valeur propre double 2 et la valeur propre simple 4.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 2 sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A}-2\mathbb{I})\mathsf{w} = 0, \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En divisant la deuxième ligne par -2 et en effectuant une permutation circulaire des lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis successivement, en effectuant les opérations suivantes,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\to \quad \begin{matrix} l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \quad \begin{matrix} l_1 \to l_1 - l_2 \\ l_3 \to l_3 + l_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \quad l_2 \to -l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2$ sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma \neq 0$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 4 sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A}-4\mathbb{I})\mathsf{w}=0, \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En divisant la deuxième ligne par -2 et en effectuant une permutation circulaire des lignes, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

puis successivement, en effectuant les opérations suivantes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad l_2 \rightarrow l_2+2l_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad l_3 \rightarrow l_3+l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres relatifs à $\lambda=4$ sont donc donnés par

$$\mathsf{w}=\delta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta \neq 0$$

ii. Comme la valeur propre double n'admet qu'un seul vecteur propre linéairement indépendant, la matrice A n'est pas diagonalisable par une transformation de similitude puisqu'elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.

iii. Calculons les mineurs diagonaux principaux d'ordre 1 à $n-1=2$ de A.

$$\mathsf{A}_1 = 4$$

$$\mathsf{A}_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 14$$

Ces mineurs étant non nuls, la matrice A admet une décomposition LU unique.

$\boxed{\text{Question III}}$

Le système de 2 équations à 3 inconnues s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 4 \\ 1 & \lambda & 2(\lambda-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la compatibilité et résoudre ce système, on réduit à une forme normale échelonnée la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda & 4 & 1 \\ 1 & \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \end{pmatrix}$$

On commence par échanger les deux lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \\ \lambda & 2\lambda & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On poursuit ensuite la réduction par

$$\ell_2 \rightarrow \ell_2-\lambda\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & 4-2\lambda^2+2\lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix} \qquad (\clubsuit)$$

Cette matrice peut encore s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & -2(\lambda-2)(\lambda+1) & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda \notin \{0,\ 2\}$, on peut diviser la deuxième ligne par $\lambda(2-\lambda)$, ce qui conduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2(\lambda-1) & 2 \\ 0 & 1 & \dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda} & \dfrac{1-2\lambda}{\lambda(2-\lambda)} \end{pmatrix}$$

Poursuivant la réduction, on obtient

$$\ell_1 \to \ell_1 - \lambda\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & \dfrac{3}{2-\lambda} \\ 0 & 1 & \dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda} & \dfrac{1-2\lambda}{\lambda(2-\lambda)} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $\lambda \neq 0$ et si $\lambda \neq 2$, la solution du système s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2-\lambda} \\ \\ \dfrac{1-2\lambda}{\lambda(2-\lambda)} \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ \\ -\dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\lambda = 0$, la matrice ($\clubsuit$) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par échanger les colonnes 2 et 3 et donc aussi les inconnues correspondantes, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On poursuit ensuite la réduction selon

$$\ell_2 \to \ell_2/4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

et

$$\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $\lambda = 0$, la solution du système s'écrit

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\lambda = 2$, la matrice ($\clubsuit$) s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, le système est incompatible.