Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2022

MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 3 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Rendez la page d'énoncé correspondante comme première page de chacune de vos réponses.
N'écrivez pas sur l'énoncé.
Rendez l'enveloppe numérotée en même temps que vos copies.

Question I

i. Le produit de deux matrices anti-symétriques est-il anti-symétrique ? Justifiez.

ii. Précisez les tailles des matrices A, B et C permettant de former l'expression $\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})$ et montrez, dans ce cas, que
$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$$

iii. Simplifiez l'expression
$$[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a}+(\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}]\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})$$
dans laquelle **a** et **b** désignent des vecteurs quelconques de l'espace physique $\mathcal{E}$.

iv. Soit A une matrice de dimension 6×4. Sous quelle condition sur $\rho(\mathsf{A})$ le système linéaire
$$\mathsf{Ax} = 0$$
possède-t-il une solution unique ? Justifiez.

v. Si $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel $\mathtt{E}$,
$$\mathtt{E}_1+\mathtt{E}_2 = \{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 \ : \ \mathbf{x}_1\in\mathtt{E}_1,\ \mathbf{x}_2\in\mathtt{E}_2\}$$
est-il un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$? Justifiez.

vi. Soit la matrice
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Cette matrice possède-t-elle une inverse ? Une inverse à droite ? Une inverse à gauche ? Justifiez et précisez si celles-ci sont uniques.

(b) Déterminez la pseudo-inverse A^+.

Tournez la page

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles (x, y, z) du système linéaire

$$\begin{cases} \beta x + (1-\beta)y + (1-\beta)z = \beta^2 \\ \beta x + (1+\beta)y + (1+\beta)z = \beta - \beta^2 \\ x + y + z = 1 - \beta \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Question III

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

où σ_0 est une constante strictement positive et $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre réel variable. La matrice A représente dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ l'application linéaire $\mathscr{A}$ qui associe le vecteur densité de courant **J** au vecteur champ électrique **E** par $\mathbf{J} = \mathscr{A}(\mathbf{E})$.

i. Déterminez la(les) condition(s) sur le paramètre α pour que A soit à la fois normale et inversible.

ii. Déterminez toutes les valeurs de α telles que la dissipation par effet Joule $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ est strictement positive quel que soit le champ électrique **E** non nul appliqué.

iii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez une base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dans laquelle $\mathscr{A}$ est représentée par une matrice diagonale. Donnez l'expression de cette matrice diagonale.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Non, le produit de deux matrices anti-symétriques n'est pas anti-symétrique. Puisque les matrices A et B sont anti-symétriques, on a

$$\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathsf{A} \quad \text{et} \quad \mathsf{B}^{\mathrm{T}} = -\mathsf{B}$$

de sorte que

$$(\mathsf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathsf{B}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathsf{B}(-\mathsf{A}) = \mathsf{BA}$$

La matrice AB est donc anti-symétrique si et seulement si A et B sont réelles et $\mathsf{BA} = -\mathsf{AB}$, ce qui n'est pas toujours le cas comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit les deux matrices anti-symétriques

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas anti-symétrique.

ii. Les opérations matricielles apparaissant dans la relation

$$\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C}) = \mathsf{AB}+\mathsf{AC}$$

sont bien définies si les dimensions des matrices A, B et C sont respectivement $(m \times n)$, $(n \times p)$ et $(n \times p)$. Sous ces conditions, les membres de droite et de gauche sont de dimensions $(m \times p)$ et

$$\begin{aligned}
[\mathsf{A}(\mathsf{B}+\mathsf{C})]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\mathsf{B}+\mathsf{C})_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\
&= [\mathsf{AB}]_{ij} + [\mathsf{AC}]_{ij} = [\mathsf{AB}+\mathsf{AC}]_{ij}
\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation.

iii. On a

$$\begin{aligned}
\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a} + (\mathbf{b}\wedge\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}\Big]\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) &= \Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{a} - (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{b}\Big]\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\
&= \Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}-\mathbf{b})\Big]\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0
\end{aligned}$$

puisque, par définition, $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ est orthogonal à $(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

iv. Les solutions de $\mathsf{Ax} = 0$ forment le noyau de A. Celui-ci se réduit au seul élément nul $\mathsf{x} = 0$ si $\dim\ker\mathsf{A} = 0$.

Par le théorème du rang, puisque A est de dimensions 6×4, on sait que

$$4 = \rho(\mathsf{A}) + \dim\ker\mathsf{A}$$

Dès lors, la solution est unique dans le cas où $\rho(\mathsf{A}) = 4$

v. Oui, il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$.

Pour démontrer que $\mathtt{F} = \mathtt{E}_1 + \mathtt{E}_2$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$, il suffit de démontrer que $\mathtt{F}$ (qui est non vide car il comporte au moins le vecteur nul de $\mathtt{E}$) contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments.

C'est bien le cas puisque, si $\mathbf{x}_a$ et $\mathbf{x}_b$ sont des éléments de $\mathtt{E}_1 + \mathtt{E}_2$, ils peuvent s'écrire $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{a1} + \mathbf{x}_{a2}$ et $\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_{b1} + \mathbf{x}_{b2}$ où $\mathbf{x}_{a1}$ et $\mathbf{x}_{b1}$ sont des éléments de $\mathtt{E}_1$ et $\mathbf{x}_{a2}$ et $\mathbf{x}_{b2}$ des éléments de $\mathtt{E}_2$. On a donc, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha \mathbf{x}_a + \beta \mathbf{x}_b = \alpha(\mathbf{x}_{a1} + \mathbf{x}_{a2}) + \beta(\mathbf{x}_{b1} + \mathbf{x}_{b2}) = (\alpha \mathbf{x}_{a1} + \beta \mathbf{x}_{b1}) + (\alpha \mathbf{x}_{a2} + \beta \mathbf{x}_{b2})$$

où, puisque $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ sont des sous-espaces vectoriels,

$$(\alpha \mathbf{x}_{a1} + \beta \mathbf{x}_{b1}) \in \mathtt{E}_1 \quad \text{et} \quad (\alpha \mathbf{x}_{a2} + \beta \mathbf{x}_{b2}) \in \mathtt{E}_2$$

On en conclut que

$$(\alpha \mathbf{x}_a + \beta \mathbf{x}_b) \in \mathtt{E}_1 + \mathtt{E}_2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

L'ensemble $\mathtt{E}_1 + \mathtt{E}_2$ constitue donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$.

vi. (a) La matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions 2×4 avec $\rho(\mathsf{A}) = 2$ puisque ses deux lignes sont linéairement indépendantes.

On en déduit que

- A ne possède pas d'inverse puisque seules les matrices carrées non singulières admettent une inverse ;
- A ne possède pas d'inverse à gauche puisqu'une matrice de dimensions $m \times n$ admet une inverse à gauche si et seulement si $\rho(\mathsf{A}) = n$, ce qui est impossible pour une matrice horizontale ;
- A possède une inverse à droite puisqu'une matrice de dimensions $m \times n$ admet une inverse à droite si et seulement si $\rho(\mathsf{A}) = m$, ce qui est le cas ici. A_d^{-1} n'est cependant pas unique. En effet, elle doit vérifier

$$\mathsf{A}\mathsf{A}_d^{-1} = \mathbb{I}_2$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\mathsf{A}_d^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$$

quels que soient les 4 éléments des deux dernières lignes.

(b) Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. On a ici

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 16, 1 et 0 (2 fois) de sorte que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{A}$$

La matrice A se confond avec la matrice Σ de sa décomposition en valeurs singulières. Dès lors, la pseudo-inverse A^+ de A est formée en suivant la procédure de calcul de Σ^+, *i.e.* en prenant l'inverse des valeurs singulières et en ajustant les dimensions de la matrice. On obtient ainsi

$$\mathsf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question II

Le système à résoudre peut être réécrit sous la forme matricielle $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ avec

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta & 1-\beta \\ \beta & 1+\beta & 1+\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{b} = \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta-\beta^2 \\ 1-\beta \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$(\mathsf{A}|\mathsf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} \beta & 1-\beta & 1-\beta & \beta^2 \\ \beta & 1+\beta & 1+\beta & \beta-\beta^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\beta \end{array}\right)$$

En permutant les lignes 1 et 3 (pour éviter/retarder la discussion sur la valeur de β), on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-\beta \\ \beta & 1+\beta & 1+\beta & \beta-\beta^2 \\ \beta & 1-\beta & 1-\beta & \beta^2 \end{array}\right)$$

puis, remplaçant ℓ_2 par $\ell_2 - \beta\ell_1$ et ℓ_3 par $\ell_3 - \beta\ell_1$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2\beta & 1-2\beta & \beta(2\beta-1) \end{array}\right)$$

Nous pouvons encore soustraire $(1-2\beta)\ell_2$ de ℓ_3 ainsi que ℓ_2 de ℓ_1 pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\beta \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(2\beta-1) \end{array}\right) \qquad (\diamondsuit)$$

- Le système est donc incompatible si $\beta \notin \{0, 1/2\}$.
- Pour $\beta = 0$, la matrice $(\diamondsuit)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Il en résulte que la solution générale du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pour $\beta = 1/2$, la matrice $(\diamondsuit)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Il en résulte que la solution générale du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Question III

i. La matrice A étant symétrique pour toutes les valeurs de α, elle est également normale.
Par ailleurs, la matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. On calcule

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{A} &= \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
(c_2 \to c_2 + c_3) \qquad &= \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha - 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \sigma_0^3 [4(2\alpha - 1) + 2 + (-1 + 1 - 2\alpha)] = 2\sigma_0^3 (3\alpha - 1)
\end{aligned}$$

en développant le déterminant suivant la première ligne.
La matrice est donc inversible si $\alpha \neq 1/3$.
En conclusion, la matrice est normale et inversible pour toutes les valeurs de $\alpha \neq 1/3$.

ii. La dissipation par effet Joule $(\mathbf{J}|\mathbf{E})$ est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul appliqué si

$$(\mathcal{A}(\mathbf{E})|\mathbf{E}) > 0, \quad \forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

Dans la base considérée, cette condition prend la forme

$$\mathsf{E}^{\mathrm{T}}\, \mathsf{A}\, \mathsf{E} > 0, \quad \forall \mathsf{E} \neq 0$$

et exprime le caractère défini positif de A.
La matrice étant symétrique, le critère de Sylvester affirme que A est définie positive si ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs, soit si

$$\begin{aligned}
m_1 &= 2\sigma_0 > 0 \\
m_2 &= \sigma_0^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\alpha \end{vmatrix} = \sigma_0^2 (4\alpha - 1) > 0 \\
m_3 &= \sigma_0^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2\alpha & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\sigma_0^3 (3\alpha - 1) > 0
\end{aligned}$$

Ces trois conditions sont respectées simultanément si $\alpha > 1/3$.

iii. Dans le cas où $\alpha = 1$, la matrice A s'écrit

$$\mathsf{A} = \sigma_0 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire est représentée par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice A. Pour obtenir une base orthonormée $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$, il faut choisir des vecteurs propres qui sont à la fois orthogonaux et normés.

Recherche des valeurs propres de A

Les valeurs propres de A s'obtiennent en multipliant par σ_0 les valeurs propres de la matrice

$\widehat{A} = A/\sigma_0$. Les valeurs propres de $\widehat{A}$ sont les solutions λ de $\det(\widehat{A} - \lambda\mathbb{I}) = 0$, soit

$$
\begin{aligned}
0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &\overset{\ell_2 \to \ell_2 + \ell_3}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&\overset{c_3 \to c_3 - c_2}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\big[(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\big] \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}
$$

Ainsi, la matrice $\widehat{A}$ possède la valeur propre double 1 et la valeur propre simple 4. Dès lors, la matrice A possède la valeur propre double σ_0 et la valeur propre simple $4\sigma_0$.

Recherche des vecteurs propres de A

Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $\widehat{A}$.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 4$ de $\widehat{A}$ sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\widehat{A} - 4\mathbb{I})w_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  On réduit la matrice du système à une forme normale échelonnée par les opérations élémentaires successives

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to -\ell_2/3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + 3\ell_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$w_1 = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \gamma_1 \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 1$ de $\widehat{A}$ sont les solutions w non nulles de

$$(\widehat{A} - \mathbb{I})w = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$w = \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall (\gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } (\gamma_2, \gamma_3) \neq (0,0)$$

Pour construire une base orthonormée, il faut choisir trois vecteurs orthonormés parmis les vecteurs propres identifiés précédemment. Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes d'une matrice normale sont orthogonaux. Il faut donc commencer par choisir deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double σ_0. La base est ensuite complétée par un vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre $4\sigma_0$.

Deux vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à la valeur propre σ_0 sont de composantes

$$\mathsf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs non orthogonaux peuvent être orthonormés en appliquant la méthode de Gram-Schmidt. Le premier vecteur de base a donc pour composantes

$$\mathsf{e}'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour le second vecteur, on calcule d'abord

$$\mathsf{y}_2 = \mathsf{x}_2 - (\mathsf{e}'^{\mathrm{T}}_1 \mathsf{x}_2)\, \mathsf{e}'_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les composantes du second vecteur sont finalement obtenues en divisant y_2 par sa norme, soit

$$\mathsf{e}'_2 = \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le dernier vecteur de la base est directement obtenu en normant le vecteur propre relatif à la valeur propre $4\sigma_0$ et a pour composantes

$$\mathsf{e}'_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{e}'_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{6} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}'_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{cases}$$

constituent une base orthonormée dans laquelle l'application linéaire $\mathcal{A}$ est représentée par la matrice diagonale

$$\mathrm{diag}(\sigma_0, \sigma_0, 4\sigma_0)$$