LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2024

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Soient les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_r$ d'un espace vectoriel complexe E. Sous quelle condition sur ces vecteurs peut-on écrire l'implication

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\cdots+\alpha_r\mathbf{a}_r=\beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2+\cdots+\beta_r\mathbf{a}_r \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_i=\beta_i \quad \forall i\in\{1,2,\ldots,r\}?$$

ii. (a) Montrez que si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de l'espace physique $\mathcal{E}$ sont linéairement indépendants (mais pas forcément orthogonaux), alors $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ constitue une base de $\mathcal{E}$.

(b) Déterminez les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque de $\mathcal{E}$ dans la base $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ en fonction des produits scalaires de $\mathbf{x}$ avec les vecteurs de cette base dans le cas particulier où les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont unitaires.

iii. On considère les matrices rectangulaires A et B.

(a) Énoncez les conditions sur les dimensions de A et de B pour pouvoir former le produit BA.

(b) Montrez que si les colonnes de B sont linéairement indépendantes, alors

$$\ker(\mathsf{A})=\ker(\mathsf{BA})$$

iv. Si la matrice A d'ordre n possède les vecteurs propres linéairement indépendants $\{\mathsf{x}_1,\mathsf{x}_2,\ldots,\mathsf{x}_n\}$ relatifs aux valeurs propres (distinctes ou confondues) $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de A^2 ? Justifiez.

Question II

Dans le cadre de l'étude de la cinématique des mécanismes, on utilise des matrices de la forme

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d}\\ \mathsf{0} & 1\end{pmatrix}$$

où R est une matrice orthogonale d'ordre 3 et où d et $\mathsf{0}$ sont des blocs de dimensions appropriées. Ces matrices permettent de représenter de façon compacte la combinaison d'une rotation et d'une translation.

i. Précisez les dimensions des blocs d et $\mathsf{0}$ apparaissant dans l'expression de A (sachant que $1\in\mathbb{R}$).

ii. Montrez que A est inversible.

iii. Déterminez l'expression de A^{-1}.

Question III

Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En discutant en fonction des paramètres β et γ,

i. calculez le déterminant de A ;
ii. déterminez le rang de A et les éventuelles relations linéaires entre les colonnes de A ;
iii. déterminez le nombre de lignes de A linéairement indépendantes.

Question IV

Dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$, on détermine expérimentalement les composantes S du tenseur de conductivité électrique $\mathbf{S}$ sous la forme

$$\mathsf{S} = s_0 \begin{pmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 3 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

où s_0 est une constante strictement positive connue et β un paramètre réel inconnu. Le tenseur $\mathbf{S}$ est tel que

$$\mathbf{j} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}$$

où les vecteurs $\mathbf{j}$ et $\mathbf{E}$ désignent respectivement la densité de courant et le champ électrique.

i. Déterminez les conditions sur β pour que la dissipation électrique $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ soit strictement positive pour tout champ électrique $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$.
ii. Déterminez les valeurs de β pour lesquelles il existe une direction de l'espace telle que l'application d'un champ électrique selon cette direction n'induit aucun courant électrique dans le système.
iii. Dans le cas où $\beta = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ l'expression des vecteurs $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathbf{S}$ est représenté par une matrice diagonale. Précisez les éléments de cette matrice.
iv. Le tenseur $\mathbf{S}$ peut-il également être représenté par une matrice diagonale dans le cas général où β est quelconque ? Justifiez.

Question I

i. L'égalité

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\cdots+\alpha_r\mathbf{a}_r=\beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2+\cdots+\beta_r\mathbf{a}_r$$

est équivalente à

$$(\alpha_1-\beta_1)\mathbf{a}_1+(\alpha_2-\beta_2)\mathbf{a}_2+\cdots+(\alpha_r-\beta_r)\mathbf{a}_r=\mathbf{0}$$

En vertu de la définition de l'indépendance linéaire, cette égalité implique

$$\alpha_i=\beta_i \quad \forall i\in\{1,2,\ldots,r\}$$

si et seulement si les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_r$ sont linéairement indépendants.

ii. (a) L'espace physique $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel de dimension 3. Tout ensemble de trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{E}$ constitue dès lors une base de cet espace.

Les 3 vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants puisque leur produit mixte

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}]=(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2$$

est non nul. En effet, les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ ne sont ni nuls ni parallèles (multiples l'un de l'autre) puisqu'ils sont linéairement indépendants.

On en conclut que $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ constitue bien une base de $\mathcal{E}$.

(b) Tout vecteur $\mathbf{x}$ peut s'exprimer (de façon unique) dans la base $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\}$ au moyen de 3 composantes α, β et γ sous la forme

$$\mathbf{x}=\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}+\gamma\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$$

On a donc

$$\begin{cases}\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\alpha+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{b}=\alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\alpha\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta\\ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=\alpha\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+\beta\,\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})+\gamma\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})=\gamma\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2\end{cases}$$

où on a tenu compte du fait que $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et que les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont unitaires. Remarquons que le vecteur $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ n'est en général pas unitaire même si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ le sont.

La troisième équation donne directement

$$\gamma=\frac{\mathbf{x}\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|^2}$$

Les composantes α et β s'obtiennent en résolvant le système

$$\begin{cases}\alpha+\beta\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}\\ \alpha\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\beta=\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}\end{cases}$$

Multipliant la première équation par $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et soustrayant membre à membre, on obtient

$$\beta\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2-1\right]=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}$$

dont on déduit que

$$\beta=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$

De même, en multipliant la seconde équation par $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et en soustrayant membre à membre ou en exploitant la symétrie du problème, on obtient

$$\alpha=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}$$

Remarquons que la division par $1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$ est licite puisque, les vecteurs unitaires $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant linéairement indépendants, ils ne sont pas parallèles et

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\neq\pm1$$

iii. (a) Pour pouvoir former le produit BA, il faut que le nombre de colonnes de B soit égal au nombre de lignes de A. Considérons par exemple une matrice B de dimensions $m \times n$ et une matrice A de dimensions $n \times p$. Le produit BA sera alors de dimensions $m \times p$.

(b) Les ensembles $\ker(\mathsf{A})$ et $\ker(\mathsf{BA})$ sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments, c'est-à-dire si on a

$$\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{A}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathsf{x} \in \ker(\mathsf{BA})$$

La condition est suffisante.

En effet, si $\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{A})$, on a $\mathsf{Ax} = 0$ et $\mathsf{BAx} = \mathsf{B}(\mathsf{Ax}) = 0$ de sorte que $\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{BA})$.

La condition est nécessaire.

En effet, si $\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{BA})$, on a $\mathsf{BAx} = 0$, ce qui peut s'écrire en introduisant les colonnes c_i $(i = 1, \ldots, n)$ de B et les éléments $(\mathsf{Ax})_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ de la matrice colonne Ax,

$$\mathsf{B}(\mathsf{Ax}) = \begin{pmatrix} \mathsf{c}_1 & \mathsf{c}_2 & \ldots & \mathsf{c}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathsf{Ax})_1 \\ (\mathsf{Ax})_2 \\ \vdots \\ (\mathsf{Ax})_n \end{pmatrix} = (\mathsf{Ax})_1\mathsf{c}_1 + (\mathsf{Ax})_2\mathsf{c}_2 + \cdots + (\mathsf{Ax})_n\mathsf{c}_n = 0$$

On en déduit que

$$(\mathsf{Ax})_1 = (\mathsf{Ax})_2 = \cdots = (\mathsf{Ax})_n = 0$$

puisque les colonnes c_i $(i = 1, \ldots, n)$ de B sont linéairement indépendantes. On a donc $\mathsf{Ax} = 0$, c'est-à-dire $\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{A})$.
De façon alternative, puisque les colonnes de B sont linéairement indépendantes, on sait que $\rho(\mathsf{B}) = n$ et que B possède une inverse à gauche. Dès lors,

$$0 = \mathsf{BAx} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \mathsf{B}_g^{-1}\mathsf{BAx} = \mathsf{Ax}$$

de sorte que $\mathsf{x} \in \ker(\mathsf{A})$.

En conclusion, on a

$$\ker(\mathsf{A}) = \ker(\mathsf{BA})$$

iv. Si x est un vecteur propre relatif à la valeur propre λ de A, on a $\mathsf{Ax} = \lambda\mathsf{x}$ Dès lors, il vient,

$$\mathsf{A}^2\mathsf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{Ax}) = \mathsf{A}(\lambda\mathsf{x}) = \lambda(\mathsf{Ax}) = \lambda(\lambda\mathsf{x}) = \lambda^2\mathsf{x}$$

ce qui montre que x est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ^2.
On en déduit que si la matrice A d'ordre n possède les vecteurs propres linéairement indépendants $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n\}$ relatifs aux valeurs propres (distinctes ou confondues) $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, alors A^2 admet les vecteurs propres linéairement indépendants $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_n\}$ relatifs aux valeurs propres $\{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2\}$.

Question II

i. Puisque la matrice R est d'ordre 3, d possède 3 lignes et $\mathsf{0}$ possède 3 colonnes, tout comme R. Le nombre 1 dans le coin inférieur droit de R montre que d possède une colonne et $\mathsf{0}$ une ligne.
Les dimensions de la matrice d sont donc (3×1) tandis que $\mathsf{0}$ est de dimensions (1×3).

ii. La matrice A étant triangulaire par blocs, son déterminant est donné par

$$\det \mathsf{A} = \det \mathsf{R} \det(1) = \det \mathsf{R}$$

Ce déterminant est non nul puisque la matrice R est orthogonale, donc inversible, c'est-à-dire telle que $\det \mathsf{R} \neq 0$. La matrice A est donc inversible puisque son déterminant est non nul.

iii. Recherchons l'inverse A^{-1} en calquant sa décomposition en blocs sur celle de A, *i.e.* en écrivant A^{-1} sous la forme

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & r \end{pmatrix}$$

où B désigne une matrice d'ordre 3, b un matrice colonne de 3 éléments, c une matrice ligne de 3 éléments et r un scalaire. Ces éléments vérifient

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{R} & \mathsf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & r \end{pmatrix} = \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0^{\mathrm{T}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} \mathsf{RB} + \mathsf{dc} = \mathbb{I}_3 \\ \mathsf{Rb} + r\mathsf{d} = 0^{\mathrm{T}} \\ \mathsf{c} = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

Puisque R est orthogonale, elle est inversible et $\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{R}^{\mathrm{T}}$. On en déduit

$$r = 1, \qquad \mathsf{c} = 0, \qquad \mathsf{B} = \mathsf{R}^{-1} = \mathsf{R}^{\mathrm{T}} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{b} = -\mathsf{R}^{-1}\mathsf{d} = -\mathsf{R}^{\mathrm{T}}\mathsf{d}$$

Puisque A est inversible, les conditions ci-dessus assurent non seulement que la matrice proposée est inverse à droite de A mais aussi inverse à gauche. Dès lors, la matrice A^{-1} est donnée par

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathsf{R}^{\mathrm{T}} & -\mathsf{R}^{\mathrm{T}}\mathsf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question III

i. Les opérations élémentaires consistant à ajouter une combinaison linéaire des autres rangées à une rangée donnée ne modifiant pas la valeur du déterminant, on calcule successivement

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2-2\beta \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+4}(2-2\beta) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1}{=} 2(\beta-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma-2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2(\beta-1)(\gamma-2)\end{aligned}$$

ii. L'expression de $\det A$ calculée ci-dessus montre que $\rho(A) = 4$ si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$ puisque le déterminant est non nul dans ce cas. Il n'y a alors aucune relation linéaire entre les lignes ou les colonnes de A. Les colonnes sont linéairement indépendantes de même que les lignes. Il reste donc à envisager les cas $\beta = 1$ et $\gamma = 2$.

◇ Dans le cas où $\gamma = 2$, la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice afin de la réduire à une forme normale échelonnée sans modifier son rang, ni les éventuelles relations linéaires entre les colonnes. Commençons par diviser la première ligne par 2, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \beta \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement,

$$\begin{array}{c} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \leftrightarrow \ell_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 \leftrightarrow c_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to -\ell_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, finalement,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3 \\ \ell_4 \to \ell_4 - (\beta - 1)\ell_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 3 dans ce cas.
Les opérations élémentaires portant sur les lignes de la matrice ne modifient pas les relations linéaires entre les colonnes de la matrice. On notera cependant que les colonnes 3 et 4 ont été échangées lors de l'échelonnage. Il y a dans ce cas une relation linéaire entre les colonnes qui peut s'écrire

$$c_4^{new} = c_1$$

soit

$$c_3 = c_1$$

On remarquera que cette relation est valable quel que soit β, donc y compris dans le cas où $\gamma = 2$ et $\beta = 1$.

◇ Dans le cas où $\beta = 1$, la matrice devient

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Commençons par diviser la première ligne par 2, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, il vient successivement,

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \leftrightarrow \ell_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma - 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_1 - 2\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma - 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_3 \leftrightarrow c_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \gamma - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ell_3 \to -\ell_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 - \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, finalement,

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \ell_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3-\gamma \\ 0 & 1 & 0 & \gamma-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de A est égal à 3 dans ce cas.
On notera que les colonnes 3 et 4 ont été échangées lors de l'échelonnage. Il y a dans ce cas une relation linéaire entre les colonnes qui peut s'écrire

$$c_4^{new} = (3-\gamma)c_1 + (\gamma-2)c_2 + (2-\gamma)c_3^{new}$$

soit

$$c_3 = (3-\gamma)c_1 + (\gamma-2)c_2 + (2-\gamma)c_4$$

En conclusion,

- si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$, $\rho(\mathsf{A}) = 4$;
- si $\gamma = 2$, $\rho(\mathsf{A}) = 3$, $c_3 = c_1$;
- si $\beta = 1$, $\rho(\mathsf{A}) = 3$, $c_3 = (3-\gamma)c_1 + (\gamma-2)c_2 + (2-\gamma)c_4$

Remarquons que les deux derniers cas peuvent être regroupés : si $\beta = 1$ ou $\gamma = 2$, la matrice A est de rang 3 et ses colonnes sont liées par la relation linéaire

$$c_3 = (3-\gamma)c_1 + (\gamma-2)c_2 + (2-\gamma)c_4$$

Si $\gamma = 2$, celle-ci se réduit en effet à $c_3 = c_1$.

iii. Le rang d'une matrice est égal au nombre de ses colonnes linéairement indépendantes et aussi au nombre de ses lignes linéairement indépendantes. On a donc 4 lignes linéairement indépendantes si $\beta \neq 1$ et $\gamma \neq 2$ et 3 lignes linéairement indépendantes si $\beta = 1$ ou $\gamma = 2$.

Question IV

i. La dissipation électrique est strictement positive quel que soit le champ électrique $\mathbf{E}$ non nul si

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{E} > 0 \quad \forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

Matriciellement, dans la base $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$, cette condition s'écrit

$$\mathsf{E}^{\mathrm{T}}\mathsf{S}\mathsf{E} > 0, \quad \forall \mathsf{E} \neq 0$$

La matrice S doit donc être définie positive.

Par le critère de Sylvester, ce sera le cas si les mineurs diagonaux principaux de la matrice symétrique S sont strictement positifs, c'est-à-dire si

$$2s_0 > 0, \quad s_0^2 \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 3 \end{vmatrix} = s_0^2(6-\beta^2) > 0$$

et

$$\det \mathsf{S} = s_0^3 \begin{vmatrix} 2 & \beta & 0 \\ \beta & 3 & \beta \\ 0 & \beta & 2 \end{vmatrix} = s_0^3\left[2(6-\beta^2) - \beta(2\beta)\right] = s_0^3(12-4\beta^2) = 4s_0^3(3-\beta^2) > 0$$

En vertu des hypothèses, la première condition est toujours vérifiée. La deuxième condition conduit à la contrainte $\beta \in]-\sqrt{6}, \sqrt{6}[$. La troisième condition conduit à la contrainte $\beta \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

Les trois conditions sont vérifiées simultanément et la matrice est donc définie positive pour toutes les valeurs de β appartenant à l'intervalle $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

ii. Si aucun courant n'est induit par l'application d'un champ électrique non nul, on a

$$\mathbf{j} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{0} \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$$

soit, matriciellement dans la base $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3\}$,

$$\mathsf{S}\mathsf{E} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathsf{E} \neq 0$$

Cette équation n'admet de solution non nulle que si S est singulière, *i.e.* si

$$\operatorname{dtm} \mathsf{S} = 4s_0^3(3-\beta^2) = 0$$

Les valeurs de β correspondantes sont donc données par $\beta = \pm\sqrt{3}$.

iii. Le tenseur $\mathbf{S}$ est représenté par une matrice diagonale dans toute base formée de vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice S.

Dans le cas où $\beta = 1$, la matrice S s'écrit

$$\mathsf{S} = s_0 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Recherche des valeurs propres de* S

  Les valeurs propres de S s'obtiennent en multipliant par s_0 les valeurs propres de $\mathsf{S}' = \mathsf{S}/s_0$. Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda)-1\right] - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) \end{aligned}$$

  Ainsi, la matrice S possède trois valeurs propres simples : s_0, $2s_0$ et $4s_0$.

- *Recherche des vecteurs propres de* S

  Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $\mathsf{S}' = \mathsf{S}/s_0$.

  - Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 1$ de S' sont les solutions w_1 non nulles de
  $$(\mathsf{S}' - \mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme échelonnée par des opérations élémentaires. Il vient
  $$\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  puis
  $$\begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  De là,
  $$\mathsf{w}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}_0$$
  - Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 2$ de S' sont les solutions w_2 non nulles de
  $$(\mathsf{S}' - 2\mathbb{I})\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  En permutant les deux premières lignes, ce système équivaut à
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  puis à
  $$\begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  De là,
  $$\mathsf{w}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R}_0$$
  - Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 4$ de S' sont les solutions w_3 non nulles de
  $$(\mathsf{S}' - 4\mathbb{I})\mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  ou, en permutant les deux premières lignes, de
  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  qui équivaut à
  $$\ell_2 \to \ell_2 + 2\ell_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et enfin à

$$\begin{array}{l}\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_2\end{array} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \alpha_3 \begin{pmatrix}1 \\ 2 \\ 1\end{pmatrix}, \quad \alpha_3 \in \mathbb{R}_0$$

Comme les vecteurs propres de valeurs propres différentes d'une matrice symétrique (donc normale) sont orthogonaux, il suffit de diviser ces vecteurs par leur norme pour obtenir les composantes de vecteurs formant une base orthonormée. Ainsi

$$\mathbf{e}_1' = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_3' = \frac{\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{6}}$$

Dans cette base, le tenseur **S** est représenté par la matrice diagonale diag $(s_0, 2s_0, 4s_0)$.

iv. La matrice S est symétrique et donc normale quelle que soit la valeur de β. On en déduit qu'elle sera toujours diagonalisable puisqu'elle possèdera toujours 3 vecteurs propres linéairement indépendants.