Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2023

MATH0013-1 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Simplifiez l'expression

$$\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\mathbf{a}+\Big[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}\Big]\mathbf{b}+\Big[(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\Big]\mathbf{c}$$

si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont des vecteurs quelconques de l'espace physique $\mathcal{E}$ tels que $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

ii. Les matrices de transformation homogènes sont utilisées pour décrire de façon compacte la combinaison d'une translation et d'une rotation. Pour toute translation décrite par $\mathsf{d}\in\mathbb{R}^3$ et toute rotation caractérisée par une matrice orthogonale R d'ordre 3, on construit la matrice carrée

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

En discutant s'il y a lieu en fonction des valeurs de d, répondez aux questions suivantes.

(a) Quelles sont les dimensions de la sous-matrice 0 apparaissant dans cette expression de A ?

(b) La matrice A est-elle normale ? Justifiez.

(c) Quelles sont les valeurs possibles de $\det\mathsf{A}$? Justifiez.

(d) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, quelle est son inverse ?

(e) La matrice A est-elle diagonalisable par une transformation de similitude dans le cas particulier où $\mathsf{R}=\mathbb{I}$?

iii. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ vers un espace vectoriel $\mathtt{F}$.

(a) Définissez le concept de noyau de $\mathcal{A}$. Comment note-t-on le noyau de $\mathcal{A}$?

(b) Le noyau de $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.

(c) Montrez que chacun des vecteurs appartenant au noyau de $\mathcal{A}$ est orthogonal à tous les vecteurs appartenant à $\mathrm{im}\,(\mathcal{A}^*)$.

Question II

On considère la matrice

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}a & a & i\\ a & i & a\\ i & a & a\end{pmatrix}$$

où a désigne un paramètre complexe.

i. Calculez $\det\mathsf{A}$.

ii. Déterminez toutes les valeurs de $a\in\mathbb{C}$ pour lesquelles A n'est pas de rang maximal.

iii. Déterminez A^{-1} dans le cas où $a=2i$.

Question III

Les déformations locales d'un matériau sous l'effet des forces qui lui sont appliquées peuvent être décrites au moyen du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$. Dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, ce tenseur est exprimé par une matrice E dont chaque élément diagonal e_{ii} traduit l'élongation ($e_{ii} > 0$) ou la contraction ($e_{ii} < 0$) de l'élément de matière initialement disposé selon la direction correspondante $\mathbf{e}_i$ et les éléments non diagonaux e_{ij} mesurent le cisaillement, *i.e.* les variations d'angles entre les éléments de matière initialement orientés selon $\mathbf{e}_i$ et $\mathbf{e}_j$ avant application des forces. La somme des éléments diagonaux mesure quant à elle la variation relative du volume du matériau considéré.

On considère les déformations décrites dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ par

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

où α désigne un paramètre réel.

i. Sur base des résultats théoriques discutés dans le cadre du cours, justifiez le fait que la variation relative du volume du matériau est identique quelle que soit la base dans laquelle le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est exprimé.

ii. Dans le cas où $\alpha = 0$, déterminez une base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dans laquelle le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est décrit par une matrice D qui ne fait apparaître que des élongations ou contractions, mais pas de cisaillement.

    Exprimez les vecteurs de cette base orthonormée (appelés les *directions principales*) en fonction des vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$. Donnez l'expression de D ainsi que celle de la matrice S décrivant le changement de base de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ à $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

Question I

i. Puisque le produit mixte est invariant en cas de permutation circulaire des 3 vecteurs qui le forment, on a

$$\begin{aligned}\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\mathbf{a}+\Big[(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}\Big]\mathbf{b}+\Big[(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\Big]\mathbf{c} \\ =\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\mathbf{a}+\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\mathbf{b}+\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\mathbf{c} \\ =\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big](\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\Big[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\Big]\,\mathbf{0}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

De façon alternative, on peut raisonner en considérant que, puisque $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$, les trois vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont coplanaires (ou nuls). Dès lors leurs produits mixtes sont nuls, *i.e.* $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}=(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$.

ii. (a) La structure de la matrice A montre que la matrice 0 possède une seule ligne et autant de colonnes que R. Cette dernière étant une matrice carrée d'ordre 3, la matrice 0 apparaissant dans l'expression de A est de dimensions (1×3).

(b) La matrice A est normale si et seulement si elle commute avec son adjointe

$$\mathsf{A}^*=\begin{pmatrix}\mathsf{R}^* & 0^* \\ \mathsf{d}^* & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathsf{R}^T & 0^T \\ \mathsf{d}^T & 1\end{pmatrix}$$

qui s'identifie ici à sa transposée puisque les éléments de A sont réels (R est orthogonale et $\mathsf{d}\in\mathbb{R}^3$).

On calcule successivement

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}=\begin{pmatrix}\mathsf{R}^T & 0^T \\ \mathsf{d}^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d} \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathsf{R}^T\mathsf{R} & \mathsf{R}^T\mathsf{d} \\ \mathsf{d}^T\mathsf{R} & \mathsf{d}^T\mathsf{d}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{I} & \mathsf{R}^T\mathsf{d} \\ \mathsf{d}^T\mathsf{R} & \mathsf{d}^T\mathsf{d}+1\end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*=\begin{pmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{R}^T & 0^T \\ \mathsf{d}^T & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathsf{R}\mathsf{R}^T+\mathsf{d}\mathsf{d}^T & \mathsf{d} \\ \mathsf{d}^T & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}+\mathsf{d}\mathsf{d}^T & \mathsf{d} \\ \mathsf{d}^T & 1\end{pmatrix}$$

en tenant compte du fait que R est orthogonale et donc telle que $\mathsf{R}^T\mathsf{R}=\mathsf{R}\mathsf{R}^T=\mathbb{I}$.

L'égalité

$$(\mathsf{A}^*\mathsf{A})_{4,4}=(\mathsf{A}\mathsf{A}^*)_{4,4}\qquad\text{soit}\qquad \mathsf{d}^T\mathsf{d}+1=1$$

n'est possible que si $\mathsf{d}^T\mathsf{d}=0$, c'est à dire si $\mathsf{d}=0$. Dans ce cas, on constate que les autres éléments des produits $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$ et $\mathsf{A}\mathsf{A}^*$ sont identiques. Dès lors, la matrice A est normale si et seulement si $\mathsf{d}=0$.

(c) En développant $\det\mathsf{A}$ selon la dernière ligne, on obtient

$$\det\mathsf{A}=\begin{vmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d} \\ 0 & 1\end{vmatrix}=\det\mathsf{R}$$

Puisque R est orthogonale, on sait que $|\det\mathsf{R}|=1$. Dès lors, les seules valeurs possibles pour $\det\mathsf{A}$ sont $+1$ et -1.

(d) La matrice A est inversible puisque son déterminant est non nul. Recherchons son inverse en introduisant une décomposition par bloc de A^{-1} identique à celle de A, soit

$$\mathsf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathsf{X} & \mathsf{u} \\ \mathsf{v}^T & \alpha\end{pmatrix}$$

Les éléments X, u, v et α ainsi introduits doivent être tels que

$$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}=\mathbb{I}\qquad\text{soit}\qquad\begin{pmatrix}\mathsf{X} & \mathsf{u} \\ \mathsf{v}^T & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathsf{R} & \mathsf{d} \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathsf{X}\mathsf{R} & \mathsf{X}\mathsf{d}+\mathsf{u} \\ \mathsf{v}^T\mathsf{R} & \mathsf{v}^T\mathsf{d}+\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ceci n'est possible que si

$$\mathsf{X}=\mathsf{R}^{-1}=\mathsf{R}^T,\qquad \mathsf{v}=0,\qquad \alpha=1,\qquad \mathsf{u}=-\mathsf{R}^T\mathsf{d}$$

Dès lors, l'inverse de A est donnée par

$$\mathsf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\mathsf{R}^T & -\mathsf{R}^T\mathsf{d} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(e) Dans le cas où $\mathsf{R} = \mathbb{I}$, on a

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathsf{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\mathsf{d} = 0$, la matrice A est égale à $\mathbb{I}_4$ et est sous forme diagonale.

Si $\mathsf{d} \neq 0$, il convient d'étudier les vecteurs propres de A. En effet, la matrice A est diagonalisable par une transformation de similitude si et seulement si celle-ci possède 4 vecteurs propres linéairement indépendants.

La matrice A étant triangulaire supérieure, les éléments diagonaux en sont les valeurs propres. Dès lors, A possède la valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 4.

Les vecteurs propres sont les solutions du système homogène $(\mathsf{A} - \mathbb{I})\mathsf{x} = 0$, soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La rang de la matrice de ce système étant égal à 1 dans le cas où $\mathsf{d} \neq 0$, on sait que la dimension de son noyau est égal à $4 - 1 = 3$. La matrice A ne possède donc pas 4 vecteurs propres linéairement indépendants et n'est pas diagonalisable par une transformation de similitude dans le cas où $\mathsf{d} \neq 0$.

iii. (a) Le noyau de l'application linéaire $\mathcal{A}$ définie de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{F}$, qui se note $\ker(\mathcal{A})$, est défini comme l'ensemble des vecteurs de $\mathtt{E}$ dont l'image par $\mathcal{A}$ est le vecteur nul de $\mathtt{F}$, soit

$$\ker(\mathcal{A}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathtt{E} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \right\}$$

(b) Le noyau de $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$ puisque

- $\ker(\mathcal{A})$ est non vide puisqu'il contient le vecteur $\mathbf{0} \in \mathtt{E}$;
- $\ker(\mathcal{A})$ contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments puisque, si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \ker(\mathcal{A})$, on a, par linéarité de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \beta\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

quelles que soient les constantes α et β complexes, de sorte que

$$\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \in \ker(\mathcal{A})$$

(c) Par définition de $\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$ s'il existe $\mathbf{y} \in \mathtt{F}$ tel que $\mathcal{A}^*(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

Quel que soit le vecteur $\mathbf{x}$ appartenant au noyau de $\mathcal{A}$ et quel que soit le vecteur $\tilde{\mathbf{x}}$ de $\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$, il vient dès lors, en utilisant la définition de l'application adjointe,

$$(\mathbf{x}|\tilde{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y})) = (\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\mathbf{0}|\mathbf{y}) = 0$$

Ceci démontre l'orthogonalité de chaque vecteur $\mathbf{x}$ de $\ker(\mathcal{A})$ avec tous les vecteurs $\tilde{\mathbf{x}}$ appartenant à $\operatorname{im}(\mathcal{A}^*)$.

Question II

i. Ajouter à une rangée de la matrice une combinaison linéaire des autres rangées ne modifie pas son déterminant. On a donc

$$\begin{aligned}
\det \mathsf{A} &= \begin{vmatrix} a & a & i \\ a & i & a \\ i & a & a \end{vmatrix} \\
\ell_1 \to \ell_1+\ell_2+\ell_3 \quad &= \begin{vmatrix} 2a+i & 2a+i & 2a+i \\ a & i & a \\ i & a & a \end{vmatrix} \\
\begin{matrix} c_1 \to c_1 - c_2 \\ c_3 \to c_3 - c_2 \end{matrix} \quad &= \begin{vmatrix} 0 & 2a+i & 0 \\ a-i & i & a-i \\ i-a & a & 0 \end{vmatrix} \\
c_1 \to c_1 - c_3 \quad &= \begin{vmatrix} 0 & 2a+i & 0 \\ 0 & i & a-i \\ i-a & a & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(2a+i)(i-a)^2
\end{aligned}$$

ii. La matrice A n'est pas de rang maximal si son déterminant est nul, c'est-à-dire si $a=i$ ou $a=-i/2$.

iii. Si $a=2i$, la matrice devient

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2i & 2i & i \\ 2i & i & 2i \\ i & 2i & 2i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = i\, \mathsf{A}_0$$

On a donc

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{i}\, \mathsf{A}_0^{-1} = -i\, \mathsf{A}_0^{-1} = -i \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{\det \mathsf{A}_0}$$

où Δ est la matrice des cofacteurs de A_0.

En particularisant le résultat de la question i. ci-dessus dans le cas où $a=2i$, on a

$$\det \mathsf{A} = -(4i+i)(i-2i)^2 = 5i$$

et donc

$$\det \mathsf{A}_0 = \left(\frac{1}{i}\right)^3 \det \mathsf{A} = (-i)^3 \det \mathsf{A} = i(5i) = -5$$

D'autre part, $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ où m_{ij} est le mineur de l'élément ij de A_0 de sorte que

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient

$$\mathsf{A}^{-1} = -\frac{i}{\det \mathsf{A}_0}\, \Delta^{\mathrm{T}} = \frac{i}{5} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Question III

i. La variation relative du volume du matériau est égale à la somme des éléments diagonaux de la matrice E représentant le tenseur des déformations dans une base donnée, c'est-à-dire la trace de E. La trace n'étant pas affectée par un changement de base, la variation relative du volume du matériau est identique quelle que soit la base dans laquelle le tenseur des déformations est exprimé.

ii. Dans le cas où $\alpha = 0$, la matrice E s'écrit

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est représenté par une matrice D diagonale (ne faisant pas apparaitre de cisaillement) dans une base formée de vecteurs propres de la matrice E. Pour obtenir une base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, il faut choisir des vecteurs propres qui sont à la fois orthogonaux et normés.

Recherche des valeurs propres de E

Les valeurs propres de E sont les solutions λ de $\det(\mathsf{E} - \lambda\mathbb{I}) = 0$, soit

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ -2 & -3-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3+\lambda & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$c_1 \to c_1 + c_3 \qquad = -\begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 1 \\ 4 & 3+\lambda & 2 \\ \lambda+1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 \to \ell_1 - \ell_3 \qquad &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda \\ 4 & 3+\lambda & 2 \\ \lambda+1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1-\lambda)\Big(8 - (3+\lambda)(\lambda+1)\Big) \\ &= -(1-\lambda)(-\lambda^2 - 4\lambda + 5) = -(\lambda-1)^2(\lambda+5) \end{aligned}$$

Dès lors, la matrice E possède la valeur propre double 1 et la valeur propre simple -5.
Recherche des vecteurs propres de E

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 1$ de E sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{E} - \mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée :

$$\begin{matrix} \ell_1 \to -\ell_1 \\ \ell_2 \to -\ell_2 \\ \ell_3 \to -\ell_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w} = \gamma_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } (\gamma_1, \gamma_2) \neq (0,0)$$

Pour construire une base orthonormée, il faut choisir trois vecteurs orthonormés parmi les vecteurs propres. Il faut donc choisir deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double 1.
Deux vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à la valeur propre 1 sont de composantes

$$\mathsf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs non orthogonaux peuvent être orthonormés en appliquant la méthode de Gram-Schmidt. Le premier vecteur de base est formé en divisant w_1 par sa norme et a donc pour composantes

$$\mathsf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

Pour le deuxième vecteur, on calcule d'abord

$$\begin{aligned} \mathsf{y}_2 &= \mathsf{w}_2 - (\mathsf{e}'^{\mathsf{T}}_1 \mathsf{w}_2)\, \mathsf{e}'_1 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les composantes du second vecteur sont finalement obtenues en divisant y_2 par sa norme, soit

$$\mathsf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

soit, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3)$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = -5$ de E sont les solutions w_3 non nulles de

$$(\mathsf{E} + 5\mathbb{I})\mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

On réduit la matrice du système à une forme normale échelonnée par les opérations élémentaires successives

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_3 \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \ell_1 \to -\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + 2\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 5\ell_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & -12 & 24 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2/6 \\ \ell_3 \to -\ell_3/12 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \gamma_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall \gamma_3 \in \mathbb{R}_0$$

Choisissant un vecteur propre unitaire parmi ces vecteurs, on obtient

$$\mathsf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Ce vecteur est bien orthogonal à $\mathbf{e}'_1$ et $\mathbf{e}'_2$ puisqu'il s'agit de vecteurs relatifs à des valeurs propres différentes d'une matrice symétrique, donc normale.
Dès lors, les vecteurs $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ et $\mathbf{e}'_3$ constituent une base orthonormée dans laquelle le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est représenté par la matrice diagonale

$$\mathsf{D} = \mathrm{diag}(1, 1, -5)$$

La matrice de changement de base correspondante est

$$\mathsf{S} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{6} & -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{6} & -2 & 2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$