LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2023

MATH0013 - ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Si A et B sont anti-hermitiennes, peut-on affirmer que la matrice $i(\mathsf{AB}-\mathsf{BA})$ est également anti-hermitienne ?

ii. Déterminez la condition sur le vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{E}$ pour que, quel que soit $\mathbf{s} \in \mathcal{E}$,

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{s} \wedge \mathbf{a})$$

iii. Soit $\mathcal{A}$ une application linéaire de $\mathtt{E} \to \mathtt{F}$.

(a) Définissez $\dim \mathtt{E}$.

(b) Définissez $\ker \mathcal{A}$.

(c) Montrez que

$$\dim \mathtt{E} - \dim\left(\ker \mathcal{A}\right) = \dim \mathtt{F} - \dim\left(\ker \mathcal{A}^*\right)$$

iv. Soit A une matrice carrée d'ordre n possédant n vecteurs propres linéairement indépendants $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ relatifs aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ éventuellement confondues mais différentes de 1. On construit la matrice B telle que

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

(a) Donnez les dimensions de B.

(b) Déterminez les valeurs et les vecteurs propres de B.

(c) La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifiez.

Question II

Déterminez toutes les solutions réelles du système linéaire

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+(2+a)y+(1+b)z=2+a \\ x+(2+a)y+(1+2b)z=2+a+b \end{cases}$$

en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres a et $b \in \mathbb{R}$.

Question III

Le tenseur central d'inertie $\mathbf{J}_\mathrm{C}$ d'un solide caractérise les propriétés d'inertie de celui-ci pour sa rotation autour d'un axe d'orientation quelconque passant par son centre d'inertie. Pour décrire cette rotation, on utilise le vecteur de Poisson $\boldsymbol{\omega}$ dont l'orientation indique la direction de l'axe de rotation et dont le module donne la vitesse angulaire correspondante.

On considère un solide dont le tenseur central d'inertie est représenté, dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, par

$$\mathsf{J}_\mathrm{C} = mR^2 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

où $m > 0$, R et α sont des paramètres réels.

i. Déterminez toutes les valeurs physiquement admissibles pour la constante α sachant que l'énergie cinétique de rotation T_C autour du centre d'inertie est telle que

$$T_\mathrm{C} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{C} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$$

ii. Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, une base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ dans laquelle le tenseur $\mathbf{J}_\mathrm{C}$ est représenté par une matrice diagonale.

iii. Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminez l'expression algébrique de T_C en fonction des composantes w'_1, w'_2 et w'_3 de $\boldsymbol{\omega}$ dans la base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

iv. Dans le cas où $\alpha = 2$, sans effectuer aucun calcul supplémentaire, déterminez une décomposition SVD de J_C.

Question I

i. Non. En effet, A et B étant anti-hermitiennes, on a

$$\mathsf{A}^* = -\mathsf{A} \quad \text{et} \quad \mathsf{B}^* = -\mathsf{B}$$

de sorte que, posant $\mathsf{X} = i(\mathsf{AB} - \mathsf{BA})$,

$$\begin{aligned} \mathsf{X}^* = [i(\mathsf{AB} - \mathsf{BA})]^* &= -i[(\mathsf{AB})^* - (\mathsf{BA})^*] = -i[\mathsf{B}^*\mathsf{A}^* - \mathsf{A}^*\mathsf{B}^*] \\ &= -i(\mathsf{BA} - \mathsf{AB}) = i(\mathsf{AB} - \mathsf{BA}) = \mathsf{X} \end{aligned}$$

La matrice donnée est donc hermitienne, pas anti-hermitienne.

ii. Développant le double produit vectoriel et tenant compte de la commutativité du produit scalaire, on peut écrire

$$(\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a}\wedge(\mathbf{s}\wedge\mathbf{a}) = (\mathbf{s}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{s}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}) = \mathbf{s}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|^2\mathbf{s}$$

Cette expression est égale à $\mathbf{s}$ si et seulement si le vecteur $\mathbf{a}$ est unitaire, c'est-à-dire si $\|\mathbf{a}\|^2 = 1$.

iii. (a) La dimension de l'espace vectoriel $\mathtt{E}$ est le nombre de vecteurs que comporte toute base de $\mathtt{E}$.
C'est aussi le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut trouver dans $\mathtt{E}$. C'est encore le nombre minimum de vecteurs générateurs de $\mathtt{E}$.

(b) Le noyau de l'application linéaire $\mathcal{A}$ définie de $\mathtt{E}$ dans $\mathtt{F}$, qui se note $\ker\mathcal{A}$, est l'ensemble des vecteurs de $\mathtt{E}$ dont l'image par $\mathcal{A}$ est le vecteur nul de $\mathtt{F}$, soit

$$\ker\mathcal{A} = \left\{\mathbf{x}\in\mathtt{E} : \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\right\}$$

(c) L'application linéaire $\mathcal{A}$ étant définie sur $\mathtt{E}$, le théorème du rang permet d'écrire

$$\dim\mathtt{E} = \rho(\mathcal{A}) + \dim\left(\ker\mathcal{A}\right) \quad \text{soit} \quad \dim\mathtt{E} - \dim\left(\ker\mathcal{A}\right) = \rho(\mathcal{A}) \tag{$\sharp$}$$

Puisque l'application linéaire $\mathcal{A}$ est définie de $\mathtt{E}\to\mathtt{F}$, l'application linéaire adjointe $\mathcal{A}^*$ est définie sur $\mathtt{F}$ et on a aussi

$$\dim\mathtt{F} = \rho(\mathcal{A}^*) + \dim\left(\ker\mathcal{A}^*\right) \quad \text{soit} \quad \dim\mathtt{F} - \dim\left(\ker\mathcal{A}^*\right) = \rho(\mathcal{A}^*) \tag{$\flat$}$$

Les matrices A et A^* représentant les applications linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ dans une base donnée possèdent le même nombre de rangées linéairement indépendantes. En effet, la transposition ne fait qu'échanger lignes et colonnes et les relations linéaires entre des nombres ou leurs conjugués sont équivalentes. Dès lors,

$$\rho(\mathsf{A}) = \rho(\mathsf{A}^*) \qquad \text{et} \qquad \rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}^*)$$

En utilisant ($\sharp$) et ($\flat$), il vient donc, comme annoncé,

$$\dim\mathtt{E} - \dim\left(\ker\mathcal{A}\right) = \dim\mathtt{F} - \dim\left(\ker\mathcal{A}^*\right)$$

iv. (a) Puisque A est carrée d'ordre n, la matrice

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre $2n$.

(b) En adoptant une décomposition en blocs compatible avec celle de la matrice B, les valeurs et vecteurs propres recherchés vérifient

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{x} \\ \mathsf{y} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathsf{x} \\ \mathsf{y} \end{pmatrix} \tag{$\dagger$}$$

soit

$$\begin{cases} \mathsf{Ax} + \mathsf{Ay} = \lambda \mathsf{x} \\ \mathsf{y} = \lambda \mathsf{y} \end{cases}$$

La deuxième équation donne soit $\mathsf{y} = 0$, soit $\lambda = 1$.

- Si $\mathsf{y} = 0$, la première équation devient $\mathsf{Ax} = \lambda \mathsf{x}$ et exprime que x est un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ. À chaque vecteur propre x_i de A relatif à la valeur propre λ_i, correspond donc un vecteur propre

  $$\begin{pmatrix} \mathsf{x}_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

  de B relatif à la même valeur propre λ_i.
  Puisque A possède n vecteurs propres linéairement indépendants, B possède également n vecteurs propres linéairement indépendants relatifs aux n valeurs propres λ_i.

- Pour $\lambda = 1$, le système ($\dagger$) se réduit à la seule équation

  $$\mathsf{Ax} + \mathsf{Ay} = \mathsf{x}$$

  que l'on peut transformer en

  $$(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n)\mathsf{x} = -\mathsf{Ay}$$

  Puisque $\lambda = 1$ n'est pas une valeur propre de A, $\det(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n) \neq 0$ et la matrice $\mathsf{A} - \mathbb{I}_n$ est inversible de sorte que

  $$\mathsf{x} = -(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n)^{-1}\mathsf{Ay}$$

  Dès lors, tous les vecteurs de la forme

  $$\begin{pmatrix} -(\mathsf{A} - \mathbb{I}_n)^{-1}\mathsf{Ay} \\ \mathsf{y} \end{pmatrix} \quad \forall \mathsf{y} \neq 0 \tag{$\spadesuit$}$$

  sont des vecteurs propres de B relatif à la valeur propre $\lambda = 1$.
  Comme $\mathsf{y} \in \mathbb{R}^n$, on peut trouver n vecteurs y linéairement indépendants, par exemple les vecteurs de base $\mathbf{e}_j$, et former les vecteurs de propres de B de la forme ($\spadesuit$). La matrice B possède donc n vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à sa valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité n.

(c) La matrice B d'ordre $2n$ possède $2n$ vecteurs propres linéairement indépendants, les n vecteurs propres linéairement indépendants construits à partir de ceux de A et les n vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à $\lambda = 1$. Les vecteurs appartenant à ces deux groupes sont bien linéairement indépendants entre eux puisque relatifs à des valeurs propres différentes d'une même matrice. La matrice B est donc diagonalisable par une transformation de similitude.

$\boxed{\text{Question II}}$

Le système à résoudre s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1+b \\ 1 & 2+a & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+a \\ 2+a+b \end{pmatrix}$$

Il peut être résolu en échelonnant la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1+b & 2+a \\ 1 & 2+a & 1+2b & 2+a+b \end{array}\right)$$

En soustrayant la première ligne aux deux autres, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & b & 1+a \\ 0 & 1+a & 2b & 1+a+b \end{array}\right)$$

Puis, en soustrayant la deuxième ligne à la troisième,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & b & 1+a \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right) \tag{$*$}$$

- Si $a \neq -1$, on continue l'échelonnage en divisant la deuxième ligne par $1+a$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{1+a} & 1 \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right)$$

  puis en soustrayant la deuxième ligne à la première,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\dfrac{b}{1+a} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{1+a} & 1 \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right) \tag{$**$}$$

  ◇ Si $b \neq 0$, on continue l'échelonnage en divisant la troisième ligne par b,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\dfrac{b}{1+a} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{b}{1+a} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  puis

$$\begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 - \left(1-\dfrac{b}{1+a}\right)\ell_3 \\ \ell_2 \to \ell_2 - \dfrac{b}{1+a}\ell_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \dfrac{b}{1+a}-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\dfrac{b}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  Si $a \neq -1$ et $b \neq 0$, le système possède la solution unique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{1+a}-1 \\ 1-\dfrac{b}{1+a} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{$\clubsuit$}$$

◇ Si $b = 0$, la matrice $(**)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte que la solution du système si $a \neq -1$ et $b = 0$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{$\heartsuit$}$$

- Si $a = -1$, la matrice $(*)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & b \end{array}\right) \tag{$***$}$$

◇ Si $b \neq 0$, la seconde ligne indique que le système est incompatible.

◇ Si $b = 0$, la matrice $(***)$ devient

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il en résulte que le système possède dans ce cas les solutions

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \tag{$\spadesuit$}$$

En conclusion,
- si $a \neq -1$ et $b \neq 0$, la solution est unique et donnée par ($\clubsuit$) ;
- si $a \neq -1$ et $b = 0$, les solutions sont données par ($\heartsuit$) ;
- si $a = -1$ et $b \neq 0$, le système est incompatible ;
- si $a = -1$ et $b = 0$, les solutions sont données par ($\spadesuit$).

Question III

i. L'énergie cinétique T_C est strictement positive quel que soit le vecteur de Poisson ω non nul si

$$T_C = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_C \cdot \boldsymbol{\omega} > 0, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$$

Dans la base considérée, cette condition prend la forme

$$\frac{1}{2}\mathrm{w}^T \mathrm{J}_C \mathrm{w} > 0, \quad \forall \mathrm{w} \neq 0$$

où

$$\mathrm{J}_C = mR^2 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice J_C doit donc être définie positive. Par le critère de Sylvester, J_C étant symétrique, ce sera le cas si les mineurs diagonaux principaux de cette matrice sont strictement positifs, c'est-à-dire si

$$mR^2(1+\alpha) > 0, \qquad (mR^2)^2 \begin{vmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (mR^2)^2(1+2\alpha) > 0$$

et

$$\det \mathsf{J}_C = (mR^2)^3 \begin{vmatrix} 1+\alpha & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (mR^2)^3 \Big[4(1+\alpha) - 2 - 2\Big] = 4(mR^2)^3\alpha > 0$$

La première condition est vérifiée si $\alpha > -1$.
La deuxième condition conduit à la contrainte $\alpha > -1/2$.
Quant au déterminant de J_C, il est strictement positif pour $\alpha > 0$
En conclusion, les trois conditions sont satisfaites pour $\alpha > 0$.

ii. Le tenseur $\mathbf{J}_C$ est représenté par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice J_C. Pour obtenir une base orthonormée $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, il faut choisir des vecteurs propres qui sont à la fois orthogonaux et normés.
Dans le cas où $\alpha = 2$, la matrice J_C s'écrit

$$\mathsf{J}_C = mR^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Recherche des valeurs propres de J_C

Les valeurs propres de J_C s'obtiennent en multipliant par mR^2 les valeurs propres de $\mathsf{J}_C/(mR^2)$. Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\mathsf{J}_C}{mR^2} - \lambda\mathbb{I}\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)(2-\lambda)^2 - 2(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda) - 2] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice J_C possède trois valeurs propres simples : mR^2, $2mR^2$ et $4mR^2$.

Recherche des vecteurs propres de J_C

Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $\mathsf{J}_C/(mR^2)$.

- ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $4mR^2$ sont les solutions w_1 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{J}_C}{mR^2} - 4\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Échelonnons la matrice du système. D'abord, permutons les lignes 1 et 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis, successivement,

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 + \ell_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to \ell_2/(-2) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_1 = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}_0$$

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2mR^2$ sont les solutions w_2 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{J}_C}{mR^2} - 2\mathbb{I}\right)\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Échelonnons la matrice de ce système. On a successivement

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to -\ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{array}{l} \ell_1 \to \ell_1 + \ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre mR^2 sont les solutions w_3 non nulles de

$$\left(\frac{\mathsf{J}_C}{mR^2} - \mathbb{I}\right)\mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme échelonnée par des opérations élémentaires. Permutons les lignes 1 et 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{array}{l} \ell_2 \to \ell_2 + \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

enfin

$$\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \delta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}_0$$

Les vecteurs propres relatifs à des valeurs propres différentes d'une matrice normale sont orthogonaux entre eux. La matrice J_C étant normale, puisque symétrique, il suffit donc de normer les vecteurs propres trouvés pour obtenir les directions cherchées, à savoir

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ \mathbf{e}'_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

iii. Dans la base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, le tenseur $\mathbf{J}_\mathrm{C}$ est représenté par la matrice diagonale

$$\mathsf{D} = \mathrm{diag}\left(4mR^2, 2mR^2, mR^2\right)$$

et

$$T_\mathrm{C} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w'_1 & w'_2 & w'_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{2}\left(4{w'_1}^2 + 2{w'_2}^2 + {w'_3}^2\right)$$

iv. La matrice J_C étant symétrique et présentant des valeurs propres strictement positives, sa décomposition SVD est donnée par

$$\mathsf{J}_\mathrm{C} = \mathsf{S}\mathsf{D}\mathsf{S}^\mathrm{T}$$

où S, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs propres orthonormés, est la matrice de changement de base orthogonale amenant J_C à la forme diagonale D. Lorsqu'on exprime la décomposition SVD, on doit veiller à ranger les valeurs propres/singulières dans l'ordre décroissant. On a donc

$$\mathsf{J}_\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$