LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Septembre 2018

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

On considère la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \beta \end{pmatrix}$$

où β désigne un paramètre réel.

i. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de A dans le cas où $\beta = -1$.

ii. Montrez que A est diagonalisable par une transformation de similitude si $\beta \notin \{-1, 13/3, 3\}$.

iii. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles la matrice A est diagonalisable par une transformation de similitude utilisant une matrice orthogonale.

Question II

i. On considère un espace vectoriel complexe $\mathtt{E}$ muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et d'une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Montrez que, quels que soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ appartenant à $\mathtt{E}$,

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i|\mathbf{y})$$

ii. Montrez que la matrice

$$\mathsf{H}_\mathsf{u} = \mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u}^T\mathsf{u}}\mathsf{u}\mathsf{u}^T$$

est orthogonale pour tout u non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$.

iii. Si $\mathcal{A}$ désigne une application linéaire et si $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, $\dots$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ sont linéairement indépendants, peut-on en conclure que les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sont linéairement indépendants ? Justifiez.

iv. Peut-on affirmer que toute matrice symétrique définie positive admet une décomposition LU unique ? Justifiez

SOLUTION TYPE

Question I

i. Dans le cas où $\beta = -1$, les valeurs propres de la matrice A sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\lambda^2$$

soit $\lambda_1 = 0$ (multiplicité 2) et $\lambda_2 = 4$ (multiplicité 1) .

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $\lambda_1 = 0$ sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A} - 0\,\mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En divisant la première ligne par 4 et en effectuant les opérations suivantes, on obtient successivement

$$\left\{ \begin{array}{l} l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad l_3 \to l_3 + l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma \neq 0.$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple $\lambda_2 = 4$ sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{A} - 4\mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. En effectuant une permutation circulaire des lignes pour amener la première ligne au bas de la matrice, il vient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad l_2 \to l_2 - 2l_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_2 \to l_2/5 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l_1 \to l_1 + 3l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -16/5 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \delta \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \delta \neq 0.$$

ii. La matrice A est diagonalisable par une transformation de similitude si et seulement si elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Si A possède trois valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 distinctes, chacune de celles-ci est de multiplicité 1 et les vecteurs propres correspondant aux différentes valeurs propres sont linéairement indépendants. Dans ce cas, la matrice A est diagonalisable par une transformation de similitude.

Dans le cas où A possède une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2, on ne peut être assuré de la possibilité de diagonaliser la matrice par une transformation de similitude sans calculer les vecteurs propres.

Les valeurs propres de la matrice A sont les solutions de

$$\begin{aligned}\det(\mathsf{A}-\lambda\mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & \beta-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\left[(1-\lambda)(\beta-\lambda)+1\right] \\ &= (4-\lambda)\left[\lambda^2-(\beta+1)\lambda+(\beta+1)\right]\end{aligned}$$

La matrice A admet la valeur propre 4 (de multiplicité au moins 1) quel que soit β. Le discriminant du polynôme $P(\lambda)=\lambda^2-(\beta+1)\lambda+(\beta+1)$ est donné par

$$\Delta=(\beta+1)^2-4(\beta+1)=(\beta+1)(\beta-3)$$

Il diffère de zéro si $\beta\notin\{-1,\ 3\}$, ce qui est le cas dans les conditions envisagées dans l'énoncé. Les valeurs propres sont donc (que Δ soit strictement positif ou strictement négatif)

$$\lambda_1=4,\qquad \lambda_2=\frac{(\beta+1)+\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \lambda_3=\frac{(\beta+1)-\sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\lambda_2\neq\lambda_3$.
On a $\lambda_1=\lambda_2$ ou $\lambda_1=\lambda_3$ si $P(\lambda_1)=0$, soit si

$$16-(\beta+1)4+(\beta+1)=0 \qquad \text{ou} \qquad \beta=\frac{13}{3}$$

Dans les conditions envisagées, on peut donc exclure l'éventualité où deux valeurs propres sont confondues. La matrice A est dès lors diagonalisable par une transformation de similitude (au moins) pour toutes les valeurs de $\beta\notin\{-1,\ 13/3,\ 3\}$.

iii. Une matrice est diagonalisable par une matrice orthogonale si et seulement si elle est normale. Comme

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A}=\mathsf{A}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}=\begin{pmatrix} 21 & -1 & 1+2\beta \\ -1 & 2 & 1-\beta \\ 1+2\beta & 1-\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^*=\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 16 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\neq\mathsf{A}^*\mathsf{A}$$

quel que soit β, on en conclut que A n'est normale pour aucune valeur de β et n'est donc diagonalisable par une matrice orthogonale pour aucune valeur de β.

Question II

i. La base $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ étant orthonormée, le produit scalaire des deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est donné en fonction de leurs composantes dans cette base par

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i$$

Les composantes des vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont telles que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \qquad \text{avec} \qquad x_i = (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)$$
$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{e}_i \qquad \text{avec} \qquad y_i = (\mathbf{y}|\mathbf{e}_i)$$

Dès lors, puisque le produit scalaire est une forme hermitienne,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)\overline{(\mathbf{y}|\mathbf{e}_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i|\mathbf{y})\end{aligned}$$

On obtient donc le résultat annoncé.

ii. La matrice $\mathsf{H_u}$ est orthogonale puisque ses éléments sont réels et que

$$\begin{aligned}\mathsf{H_u^T H_u} &= \left(\mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}(\mathsf{uu^T})^\mathsf{T}\right)\left(\mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T}\right) \\ &= \left(\mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T}\right)\left(\mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T}\right) \\ &= \mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} + 4\frac{1}{(\mathsf{u^Tu})^2}(\mathsf{uu^T})(\mathsf{uu^T}) - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} \\ &= \mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} + 4\frac{1}{(\mathsf{u^Tu})^2}\mathsf{u(u^Tu)u^T} - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} \\ &= \mathbb{I}_n - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} + 4\frac{\mathsf{u^Tu}}{(\mathsf{u^Tu})^2}\mathsf{uu^T} - 2\frac{1}{\mathsf{u^Tu}}\mathsf{uu^T} \\ &= \mathbb{I}_n\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que $\mathsf{u^Tu}$ est un scalaire.

iii. Si les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ sont linéairement indépendants, alors il en est de même des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Pour le montrer, procédons par l'absurde en prouvant que l'hypothèse de dépendance linéaire de ces vecteurs doit être rejetée.

En effet, si les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ sont linéairement dépendants, alors il existe des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ non toutes nulles telles que

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

Dans ce cas, avec les mêmes constantes, on a

$$\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

soit

$$\lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{a}_1) + \lambda\mathcal{A}(\mathbf{a}_2) + \cdots + \lambda\mathcal{A}(\mathbf{a}_k) = \mathbf{0}$$

et les vecteurs $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{a}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{a}_k)$ sont linéairement dépendants, ce qui contredit l'hypothèse. Les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ sont donc linéairement indépendants.

iv. Toute matrice symétrique définie positive admet une décomposition LU unique. En effet, si A est symétrique définie positive, tous ses mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs en vertu du critère de Sylvester.

En particulier, tous les mineurs diagonaux principaux d'ordre 1 à n-1 de A sont donc non nuls et la conditions suffisante pour que A admette une décomposition LU unique est donc rencontrée.