LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2017

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 servant à décrire la déformation locale d'un matériau en raison des forces qui lui sont appliquées. Si on considère un élément de matière initialement de longueur ℓ_0 et aligné avec la direction $\mathbf{e}$ (le vecteur $\mathbf{e}$ étant unitaire) avant l'application des forces, sa longueur ℓ dans la configuration déformée produite par l'application des forces est donnée par

$$\ell = \ell_0(1+\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{e})$$

Dans une base orthonormée particulière ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), on détermine les composantes E du tenseur des déformations sous la forme

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 5+4\alpha & 0 & 2\alpha \\ 0 & 5 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 5+\alpha \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon_0 > 0$ est une constante connue et où α est un paramètre réel inaccessible à l'expérience.

i. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles il existe à la fois au moins une direction $\mathbf{e}^{(1)}$ de l'espace selon laquelle le matériau subit une élongation positive ($\ell > \ell_0$) et au moins une direction $\mathbf{e}^{(2)}$ selon laquelle le matériau subit une contraction ($\ell < \ell_0$). Justifiez.

ii. Dans le cas où $\alpha = 1$, déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, une base orthonormée dans laquelle le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est représenté par une matrice diagonale. Donnez l'expression de cette matrice diagonale.

Question II

i. Démontrez la formule

$$(\mathsf{AB})^* = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$$

Précisez les tailles des matrices pour lesquelles cette formule est applicable.

ii. Peut-on affirmer que $\rho(\mathsf{A}^2) = \rho(\mathsf{A})$ quelle que soit la matrice carrée A ? Justifiez.

iii. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels $\mathtt{E}_1$ et $\mathtt{E}_2$ d'un espace vectoriel $\mathtt{E}$ constitue-t-elle un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$? Justifiez.

iv. Soit M une matrice symétrique définie positive d'ordre n. On dit que $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$ est conjugué à $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$ par rapport à M si $\mathsf{u}^T\mathsf{M}\mathsf{v} = 0$.

(a) Montrez que si u est conjugué à v par rapport à M alors v est conjugué à u par rapport à M.

(b) Montrez que si a_1, $\mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n$ sont des éléments non nuls de $\mathbb{R}^n$ conjugués deux à deux, alors a_1, $\mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

(c) Justifiez l'existence et l'unicité de la solution du problème linéaire $\mathsf{Mx} = \mathsf{b}$ quel que soit $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(d) Si les a_1, $\mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n$ sont non nuls et conjugués deux à deux par rapport à M et si $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$, déterminez les composantes de la solution du système $\mathsf{Mx} = \mathsf{b}$ dans la base formée par a_1, $\mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n$.

Question I

i. Les directions $\mathbf{e}^{(1)}$ et $\mathbf{e}^{(2)}$ dans lesquelles le matériau subit respectivement une élongation et une contraction vérifient

$$\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^{(1)} > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^{(2)} < 0$$

ou encore, matriciellement,

$$\mathsf{e}^{(1)^{\mathrm{T}}} \mathsf{E} \mathsf{e}^{(1)} > 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{e}^{(2)^{\mathrm{T}}} \mathsf{E} \mathsf{e}^{(2)} < 0$$

ce qui nous apprend que la matrice symétrique E doit être indéfinie c'est-à-dire posséder au moins une valeur propre strictement négative et une valeur propre strictement positive.

Les valeurs propres de E sont, au facteur $\varepsilon_0 > 0$ près, celles de $\mathsf{E}' = \mathsf{E}/\varepsilon_0$. Celles-ci sont les solutions de

$$\begin{aligned}
\det(\mathsf{E}' - \lambda \mathbb{I}) &= \begin{vmatrix} 5+4\alpha-\lambda & 0 & 2\alpha \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2\alpha & 0 & 5+\alpha-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)[(5+4\alpha-\lambda)(5+\alpha-\lambda) - 4\alpha^2] \\
&= (5-\lambda)[\lambda^2 - \lambda(10+5\alpha) + 25\alpha + 25] \\
&= -(\lambda-5)^2(\lambda - 5\alpha - 5) = 0
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de E sont $5\varepsilon_0 > 0$ (multiplicité double) et $(5+5\alpha)\varepsilon_0$ (multiplicité simple) qui est strictement négative si $\alpha < -1$.

Il existe donc à la fois une direction selon laquelle le matériau subit une élongation et une direction selon laquelle il subit une contraction si $\alpha < -1$.

ii. Si $\alpha = 1$, la matrice E s'écrit

$$\mathsf{E} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 5\varepsilon_0$ et $\lambda_3 = 10\varepsilon_0$.

La base recherchée existe puisque la matrice E est symétrique, donc normale et diagonalisable. Elle est composée de vecteurs propres orthonormés de E.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double $5\varepsilon_0$ sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{E} - 5\varepsilon_0 \mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée. Divisant la première ligne par 4, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On continue alors la réduction suivant

$$\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad (\gamma_1, \gamma_2) \neq (0,0)$$

Parmi ces vecteurs, nous retenons les vecteur unitaires de composantes

$$\mathsf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $10\varepsilon_0$ sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{E} - 10\varepsilon_0 \mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Réduisons la matrice du système à une forme normale échelonnée.

$$\begin{matrix} \ell_1 \to -\ell_1 \\ \ell_2 \to -\ell_2/5 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathsf{w} = \gamma_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \gamma_3 \neq 0$$

Parmi ces vecteurs, nous retenons le vecteur unitaire de composantes

$$\mathsf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'examen des composantes des 3 vecteurs retenus nous apprend qu'ils sont orthogonaux. La base recherchée est donc composée des vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{E}_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Dans cette base, le tenseur des déformations $\mathbf{E}$ est représenté par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}(5\varepsilon_0, 5\varepsilon_0, 10\varepsilon_0)$$

Question II

i. Pour que les différents produits matriciels puissent être définis, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Considérant des matrices A et B respectivement de dimensions $m \times n$ et $n \times p$, le produit AB est de dimensions $m \times p$ tandis que les dimensions de $(\mathsf{AB})^*$ sont $p \times m$. Par ailleurs, les dimensions de A^* et B^* sont $n \times m$ et $p \times n$ et celles du produit $\mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$ sont $p \times m$.

   L'égalité proposée peut être démontrée en procédant élément par élément, *i.e.*

$$\begin{aligned} [(\mathsf{AB})^*]_{ij} = [\overline{(\mathsf{AB})}]_{ji} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{jk} \overline{b}_{ki} \\ = \sum_{k=1}^{n} [\mathsf{A}^*]_{kj} [\mathsf{B}^*]_{ik} = \sum_{k=1}^{n} [\mathsf{B}^*]_{ik} [\mathsf{A}^*]_{kj} = [\mathsf{B}^*\mathsf{A}^*]_{ij} \end{aligned}$$

ii. Non, cette affirmation est fausse. Considérons par exemple la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \rho(\mathsf{A}) = 1$$

On a

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \rho(\mathsf{A}^2) = 0$$

iii. Oui.

Pour démontrer que $\mathtt{F} = \mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$, il suffit de démontrer que $\mathtt{F}$ (qui est non vide car il comporte au moins le vecteur nul de $\mathtt{E}$) contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments. C'est bien le cas puisque, si $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ sont des éléments de $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$, alors $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathtt{E}_1$ et, puisque $\mathtt{E}_1$ est un espace vectoriel,

$$\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \in \mathtt{E}_1 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

De même, puisque $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathtt{E}_2$ et que $\mathtt{E}_2$ est un espace vectoriel,

$$\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \in \mathtt{E}_2 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Dès lors,

$$\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2 \in \mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2 \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

et $\mathtt{E}_1 \cap \mathtt{E}_2$ constitue bien un sous-espace vectoriel de $\mathtt{E}$.

iv. (a) Si u est conjugué à v par rapport à M alors

$$0 = \mathsf{u}^{\mathrm{T}} \mathsf{M} \mathsf{v}$$

et donc, puisque M est symétrique,

$$0 = \left(\mathsf{u}^{\mathrm{T}} \mathsf{M} \mathsf{v}\right)^{\mathrm{T}} = \mathsf{v}^{\mathrm{T}} \mathsf{M}^{\mathrm{T}} \mathsf{u} = \mathsf{v}^{\mathrm{T}} \mathsf{M} \mathsf{u}$$

ce qui démontre que v est conjugué à u par rapport à M.

(b) Les éléments proposés étant en nombre égal à la dimension de l'espace, soit n, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$ s'ils sont linéairement indépendants c'est-à-dire si

$$\lambda_1 \mathsf{a}_1 + \lambda_2 \mathsf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{a}_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Multipliant la combinaison linéaire par la matrice M, on obtient

$$\lambda_1 \mathsf{M} \mathsf{a}_1 + \lambda_2 \mathsf{M} \mathsf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{M} \mathsf{a}_n = 0$$

Ensuite, multipliant par ${\mathsf{a}_i}^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$${\mathsf{a}_i}^{\mathrm{T}} (\lambda_1 \mathsf{M} \mathsf{a}_1 + \lambda_2 \mathsf{M} \mathsf{a}_2 + \cdots + \lambda_n \mathsf{M} \mathsf{a}_n) = \lambda_i {\mathsf{a}_i}^{\mathrm{T}} \mathsf{M} \mathsf{a}_i = 0$$

puisque les éléments sont conjugués deux à deux.

La matrice M étant définie positive et les éléments a_i non nuls, on a

$${\mathsf{a}_i}^{\mathrm{T}} \mathsf{M} \mathsf{a}_i > 0$$

de sorte que

$$\lambda_i = 0$$

Les n éléments constituent donc une base de $\mathbb{R}^n$.

(c) La matrice M étant symétrique définie positive, son déterminant est strictement positif. Dès lors, M est inversible et le système linéaire proposé possède la solution unique $\mathsf{x} = \mathsf{M}^{-1} \mathsf{b}$ quel que soit $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$.

(d) Le système à résoudre $\mathsf{M}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ peut encore s'écrire, en exprimant la solution dans la base des a_i,

$$\mathsf{M}(x_1\mathsf{a}_1 + x_2\mathsf{a}_2 + \cdots x_n\mathsf{a}_n) = \mathsf{b}$$

Multipliant cette relation par ${\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}$, on a

$${\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{M}(x_1\mathsf{a}_1 + x_2\mathsf{a}_2 + \cdots x_n\mathsf{a}_n) = {\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{b}$$

soit, puisque les a_i sont conjugués deux à deux par rapport à M,

$$x_i({\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{a}_i) = {\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{b}$$

de sorte que, ${\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{a}_i$ étant non nul, les composantes de la solution du système dans la base des a_i sont

$$x_i = \frac{{\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{b}}{{\mathsf{a}_i}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{a}_i}, \quad \forall i = 1, ..., n$$