MATH0013-1 ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'enveloppe et le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Simplifiez l'expression suivante dans laquelle $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ désignent des vecteurs orthogonaux de l'espace physique $\mathcal{E}$,

$$[(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})] \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\, \mathbf{c}$$

ii. Soit $\mathcal{A} : \mathtt{E} \to \mathtt{F}$ où $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$ sont deux espaces vectoriels complexes. Soit une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathtt{E}$ et une base orthonormée $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ de $\mathtt{F}$.

(a) Quelles sont les dimensions de la matrice A représentant $\mathcal{A}$ dans les bases orthonormées de $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$ considérées ?

(b) Pourquoi peut-on affirmer que $\dim(\ker \mathcal{A}) \geq 1$?

(c) Montrez que l'égalité définissant l'application linéaire adjointe de $\mathcal{A}$ est vérifiée si on la traduit dans les bases orthonormées de $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$ considérées en représentant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ respectivement par les matrices A et A^*.

iii. Soit $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$ trois vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension 5. Déterminez la condition sur les paramètres α et β pour que les vecteurs

$$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_2 + 3\alpha\mathbf{a}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_3 + \beta\mathbf{a}_1$$

soient linéairement indépendants.

iv. Soit la matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Cette matrice possède-t-elle une inverse ? Une inverse à droite ? Une inverse à gauche ? Justifiez.

(b) Déterminez la pseudo-inverse A^+.

Question II

On considère la matrice carrée d'ordre $3n$ (avec $n > 0$ entier)

$$\mathsf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathsf{X}^1 & \mathsf{X}^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathsf{X}^{n-1} & \mathsf{X}^n & \cdots & \mathsf{X}^{2n-2} \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Calculez $\det \mathsf{X}$.

ii. Calculez $\det \mathsf{A}_n$.

iii. Montrez que X est symétrique définie positive.

iv. Montrez que X^n est symétrique définie positive quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

v. Déterminez X^{-1}.

vi. Déterminez une décomposition par blocs de $(\mathsf{A}_2)^{-1}$ en fonction de X^{-1}.

Question III

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique $\mathbf{H}$, son aimantation éventuelle peut être décrite par le moment dipolaire magnétique par unité de volume $\mathbf{M}$, communément appelé vecteur aimantation. Si on excepte le cas des matériaux ferromagnétiques qui présentent une aimantation permanente, le vecteur $\mathbf{M}$ est relié à $\mathbf{H}$ par une loi du type $\mathbf{M} = \mathcal{X}(\mathbf{H})$ où $\mathcal{X}$ désigne une application linéaire.

Dans une base orthonormée particulière $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, on détermine les composantes de l'application linéaire $\mathcal{X}$ d'un matériau sous la forme

$$\mathsf{X} = \chi_0 \begin{pmatrix} -1 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & \beta \\ \beta & \beta & 2 \end{pmatrix}$$

où χ_0 et β sont des constantes réelles avec $\chi_0 > 0$.

i. Déterminez toutes les valeurs de β pour lesquelles il existe un champ magnétique non nul $\mathbf{H}_0$ ne provoquant aucune aimantation.

ii. Dans le cas où $\beta = 2$, déterminez l'expression en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, et $\mathbf{e}_3$ de vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ formant une base orthonormée dans laquelle $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale. Précisez l'expression de cette matrice diagonale.

SOLUTION TYPE

Question I

i. En développant le double produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, on a

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) &= \mathbf{b}\ [(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c})]-\mathbf{c}\ [(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{b})]\\ &= [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{b}\end{aligned}$$

puisque $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=0$ et que $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ est le produit mixte $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]$. On a alors

$$[(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})]\cdot[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\,\mathbf{c}=[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]^2\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$$

puisque $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont orthogonaux.

ii. (a) L'application $\mathcal{A}$ étant définie de $\mathtt{E}$, espace vectoriel de dimension 3, vers $\mathtt{F}$, espace vectoriel de dimension 2, elle est représentée par une matrice A de dimensions 2×3.

(b) Par le théorème du rang, on sait que

$$\dim(\ker\mathcal{A})=\dim\mathtt{E}-\rho(\mathcal{A})=3-\rho(\mathcal{A})$$

Par ailleurs, comme $\rho(\mathcal{A})=\rho(A)\leq 2$, puisque le rang d'une matrice ne peut excéder la plus petite de ses dimensions (ou $\rho(\mathcal{A})=\dim(\mathrm{im}\mathcal{A})\leq\dim\mathtt{F}=2$ puisque $\mathrm{im}\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathtt{F}$), il vient, comme annoncé,

$$\dim(\ker\mathcal{A})\geq 1$$

(c) L'application adjointe de $\mathcal{A}$ est l'application $\mathcal{A}^*:\mathtt{F}\to\mathtt{E}$ telle que

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y})=(\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))\qquad\forall\mathbf{x}\in\mathtt{E},\ \forall\mathbf{y}\in\mathtt{F}\qquad(\spadesuit)$$

Notons A et A^* les matrices représentant les applications linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ dans les bases orthonormées correspondantes de $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$. Puisque le produit scalaire peut être calculé à partir des composantes dans de telles bases par

$$(\mathbf{a}|\mathbf{b})=\mathsf{b}^*\mathsf{a}$$

les deux membres de la définition ($\spadesuit$) s'écrivent respectivement

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{y})=\mathsf{y}^*(\mathsf{A}\,\mathsf{x})=\mathsf{y}^*\mathsf{A}\,\mathsf{x}$$

et

$$(\mathbf{x}|\mathcal{A}^*(\mathbf{y}))=(\mathsf{A}^*\,\mathsf{y})^*\mathsf{x}=\mathsf{y}^*(\mathsf{A}^*)^*\mathsf{x}=\mathsf{y}^*\mathsf{A}\,\mathsf{x}$$

Les deux membres sont donc bien égaux lorsqu'on traduit la définition dans les bases orthonormées de $\mathtt{E}$ et $\mathtt{F}$ en représentant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ par les matrices A et A^*.

iii. Par définition de l'indépendance linéaire, les vecteurs $\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2+3\alpha\mathbf{a}_3$ et $\mathbf{a}_3+\beta\mathbf{a}_1$ sont linéairement indépendants si

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2)+\lambda_2(\mathbf{a}_2+3\alpha\mathbf{a}_3)+\lambda_3(\mathbf{a}_3+\beta\mathbf{a}_1)=\mathbf{0}\qquad\Rightarrow\qquad\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

La relation

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2)+\lambda_2(\mathbf{a}_2+3\alpha\mathbf{a}_3)+\lambda_3(\mathbf{a}_3+\beta\mathbf{a}_1)=\mathbf{0}$$

peut être exprimée sous la forme

$$\mathbf{a}_1(\lambda_1+\beta\lambda_3)+\mathbf{a}_2(2\lambda_1+\lambda_2)+\mathbf{a}_3(3\alpha\lambda_2+\lambda_3)=\mathbf{0}$$

Puisque $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_3$, sont linéairement indépendants, cette relation implique

$$\begin{cases}\lambda_1+\beta\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2=0\\ 3\alpha\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

Ce système linéaire homogène possède la solution unique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6\alpha\beta \neq 0$$

Les vecteurs donnés sont donc linéairement indépendants si $1 + 6\alpha\beta \neq 0$.

iv. (a) La matrice

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de dimensions 4×3 avec $\rho(\mathsf{A}) = 2$ puisque seules les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes.

On en déduit que

- A ne possède pas d'inverse puisque seules les matrices carrées non singulières admettent une inverse ;
- A ne possède pas d'inverse à droite puisqu'une matrice de dimensions $m \times n$ admet une inverse à droite si et seulement si $\rho(\mathsf{A}) = m$, ce qui est impossible pour une matrice verticale ;
- A ne possède pas d'inverse à gauche puisqu'une matrice de dimensions $m \times n$ admet une inverse à gauche si et seulement si $\rho(\mathsf{A}) = n$, ce qui n'est pas le cas ici.

(b) Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de la matrice $\mathsf{A}^*\mathsf{A}$. On a ici

$$\mathsf{A}^*\mathsf{A} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 16, 1 et 0 de sorte que

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathsf{A}$$

La matrice A se confond avec la matrice Σ de sa décomposition en valeurs singulières. Dès lors, la pseudo-inverse A^+ de A est formée en suivant la procédure de calcul de Σ^+, *i.e.* en prenant l'inverse des valeurs singulières et en ajustant les dimensions de la matrice. On obtient ainsi

$$\mathsf{A}^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question II

i. En appliquant la première loi des mineurs, par exemple à la première ligne de la matrice, on obtient

$$\det \mathsf{X} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

ii. La matrice A_n étant triangulaire par blocs, son déterminant est égal au produit des déterminants des blocs carrés formant la diagonale principale, soit

$$\det \mathsf{A}_n = \det \mathbb{I} \det \mathsf{X}^2 \det \mathsf{X}^4 \ \dots \ \det \mathsf{X}^{2n-2}$$

Puisque le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants de ces matrices, on a alors

$$\det \mathsf{A}_n = (\det \mathsf{X})^{2+4+\dots+2n-2} = (\det \mathsf{X})^{2(1+2+\dots+n-1)} = 3^{n(n-1)}$$

puisque $\det \mathsf{X} = 3$ et

$$(1+2+\dots+n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

iii. La matrice

$$\mathsf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est symétrique. Les mineurs diagonaux principaux

$$\det \mathsf{X}_1 = 2 > 0, \qquad \det \mathsf{X}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

et

$$\det \mathsf{X}_3 = \det \mathsf{X} = 3 > 0$$

sont strictement positifs de sorte que, par application du critère de Sylvester, la matrice est bien définie positive.

iv. D'une part, le produit d'une matrice symétrique par elle-même est une matrice symétrique puisque

$$(\mathsf{X}^2)^{\mathrm{T}} = (\mathsf{XX})^{\mathrm{T}} = \mathsf{X}^{\mathrm{T}}\mathsf{X}^{\mathrm{T}} = \mathsf{XX} = \mathsf{X}^2$$

et, plus généralement, pour un produit de n facteurs identiques,

$$(\mathsf{X}^n)^{\mathrm{T}} = (\mathsf{XX}\cdots\mathsf{X})^{\mathrm{T}} = \mathsf{X}^{\mathrm{T}}\mathsf{X}^{\mathrm{T}}\cdots\mathsf{X}^{\mathrm{T}} = \mathsf{XX}\cdots\mathsf{X} = \mathsf{X}^n$$

Toute puissance X^n de X est donc symétrique.
D'autre part, les valeurs propres de la $n^{\text{ième}}$ puissance d'une matrice sont les $n^{\text{ième}}$ puissances de celles de cette matrice. On a en effet, si $\mathsf{Ax} = \lambda\mathsf{x}$,

$$\mathsf{A}^n\mathsf{x} = \mathsf{A}^{n-1}(\mathsf{Ax}) = \mathsf{A}^{n-1}(\lambda\mathsf{x}) = \lambda\mathsf{A}^{n-1}\mathsf{x} = \lambda^2\mathsf{A}^{n-2}\mathsf{x} = \dots = \lambda^n\mathsf{A}^0\mathsf{x} = \lambda^n\mathsf{x}$$

La matrice X étant définie positive, ses valeurs propres λ sont strictement positives. Les valeurs propres λ^n de X^n le sont donc aussi, ce qui garantit que X^n est définie positive.
En conclusion, X^n est une matrice symétrique définie positive $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

v. On a,

$$\mathsf{X}^{-1} = \frac{\Delta^{\mathrm{T}}}{\det \mathsf{X}}$$

où Δ est la matrice des cofacteurs de X dont les éléments se calculent suivant

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

où m_{ij} est le mineur de l'élément ij. On obtient

$$\mathsf{X}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

vi. En décomposant la matrice A_2 en blocs carrés d'ordre 3, on a

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ X^1 & X^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que, si on la décompose aussi en blocs d'ordre 3, A_2^{-1} est telle que

$$A_2 A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ X & X^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_6$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} B & C \\ XB + X^2 D & XC + X^2 E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B = \mathbb{I}_3 \quad \text{et} \quad C = 0$$

de sorte qu'il reste à satisfaire

$$X + X^2 D = 0 \quad \text{et} \quad X^2 E = \mathbb{I}_3$$

Puisque X est inversible, il vient successivement

$$E = (X^{-1})^2$$

et

$$X^2 D = -X \quad \Rightarrow \quad XD = -\mathbb{I}_3 \quad \Rightarrow \quad D = -X^{-1}$$

Finalement,

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & 0 \\ -X^{-1} & (X^{-1})^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Question III}}$

i. Les vecteurs $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{0}$ ne donnant naissance à aucune aimantation sont tels que $\chi(\mathbf{H}_0) = \mathbf{0}$, soit, matriciellement, $X\, H_0 = 0$. Un tel système homogène possède des solutions non nulles si et seulement si X est singulière. Les valeurs de β recherchées sont donc celles qui annulent le déterminant de X.

On calcule

$$\det X = \chi_0^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & \beta \\ \beta & \beta & 2 \end{vmatrix} \overset{\ell_1 \to \ell_1 + \ell_2}{=} \chi_0^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\beta \\ 1 & -1 & \beta \\ \beta & \beta & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \chi_0^3 \; 2\beta \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \beta \end{vmatrix} = 4\, \beta^2\, \chi_0^3$$

Puisque $\chi_0 > 0$, il n'existe donc de vecteur $\mathbf{H}_0$ non nul ne produisant aucune aimantation que pour $\beta = 0$.

ii. L'application linéaire $\mathcal{X}$ est représentée par une matrice diagonale dans une base formée de vecteurs propres de la matrice X. Il faudra aussi que les vecteurs propres choisis soient orthonormés pour obtenir la base désirée.

Dans le cas où $\beta = 2$, la matrice X s'écrit

$$X = \chi_0 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- *Recherche des valeurs propres de* X

  Les valeurs propres de X s'obtiennent en multipliant par χ_0 les valeurs propres de $\mathsf{X}' = \mathsf{X}/\chi_0$. Ces dernières sont les zéros de

$$\det(\mathsf{X}' - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{cases} \ell_1 \to \ell_1 + (1+\lambda)\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_2 \end{cases}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\lambda(\lambda+2) & 2(\lambda+2) \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2(2+\lambda) & -(2+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

  Ainsi, la matrice X possède une valeur propre simple, $4\chi_0$, et une valeur propre double, $-2\chi_0$.

- *Recherche des vecteurs propres de* X

  Ce sont les mêmes que ceux de la matrice $\mathsf{X}' = \mathsf{X}/\chi_0$.

  ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 4$ de X' sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\mathsf{X}' - 4\mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Réduisant la matrice du système homogène à une forme échelonnée, on obtient successivement,

$$\ell_1 \leftrightarrow \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 + 5\ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\ell_2 \to -\ell_2/(24) \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \ell_1 \to \ell_1 + 5\ell_2 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 12\ell_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là, on tire

$$\mathsf{w}_1 = \gamma \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

  On identifie le vecteur propre unitaire correspondant

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

  ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = -2$ de X' sont les solutions w non nulles de

$$(\mathsf{X}' + 2\mathbb{I})\mathsf{w} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  Deux opérations élémentaires sur les lignes de la matrice conduisent à

$$\begin{matrix} \ell_2 \to \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  et

$$\mathsf{w} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad (\gamma, \delta) \neq (0,0)$$

Parmi ces vecteurs propres, il faut en extraire deux qui sont orthogonaux et normés. Pour ce faire, on utilise le lemme d'orthonormation de Gram-Schmidt.

Choisissons deux vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $-2\chi_0$. Soit, sous forme matricielle,

$$\mathsf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{w}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule successivement

$$\mathsf{E}_2 = \frac{\mathsf{w}_2}{\|\mathsf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

et

$$\mathsf{E}_3 = \frac{\mathsf{E}_3'}{\|\mathsf{E}_3'\|}$$

où

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_3' &= \mathsf{w}_3 - \left[\, \mathsf{E}_2^{\mathsf{T}} \mathsf{w}_3 \,\right] \mathsf{E}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ceci conduit à

$$\mathsf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Les vecteurs $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ forment bien une base orthonormée puisque, d'une part, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double sont issus du lemme de Gram-Schmidt et que, d'autre part, le vecteur propre relatif à $4\chi_0$ est normé et orthogonal aux deux autres, comme vecteur propre d'une matrice symétrique relatif à une valeur propre différente.

Dans cette base, l'application linéaire $\mathcal{X}$ est représentée par la matrice diagonale

$$\operatorname{diag}(4\chi_0, -2\chi_0, -2\chi_0)$$