Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2013

MATH0013-1 : ALGÈBRE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Le lent écoulement des eaux souterraines à travers les aquifères et autres milieux poreux est décrit par la loi de Darcy. Celle-ci relie la vitesse de filtration $\mathbf{q}$, aussi appelée flux de Darcy, au gradient $\mathbf{g} = \nabla p$ de la pression réduite p par le biais du tenseur de perméabilité $\boldsymbol{\kappa}$ et de la viscosité μ de l'eau (supposée constante et strictement positive).

Sur base de tests effectués au sein d'un milieu particulier, on établit que la loi de Darcy peut s'écrire, dans une base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, sous la forme

$$\mathsf{q} = -\frac{1}{\mu}\,\mathsf{K}\mathsf{g} \qquad \text{où} \qquad \mathsf{K} = \kappa_0 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et où κ_0 est une constante strictement positive.

i. Sans effectuer aucun calcul, justifiez l'existence d'une base orthonormée dans laquelle la loi de Darcy peut être écrite au moyen d'une matrice diagonale.

ii. Déterminez, en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$, les directions de l'espace telles que l'application d'un gradient de pression réduite dans une telle direction s'accompagne d'un flux de Darcy dans la même direction mais de sens opposé.

Question II

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.

Toute application linéaire $\mathcal{P} : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ telle que $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P}$ est appelée une *projection*. La projection est dite *orthogonale* si $\ker\mathcal{P} \perp \operatorname{im}\mathcal{P}$ c'est-à-dire si

$$\forall \mathbf{y} \in \ker\mathcal{P}, \forall \mathbf{z} \in \operatorname{im}\mathcal{P} : (\mathbf{y}|\mathbf{z}) = 0$$

i. Montrez que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathsf{E}$,
   (a) $\mathbf{x} - \mathcal{P}(\mathbf{x}) \in \ker\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}$ est une projection ;
   (b) $(\mathbf{x}|\mathcal{P}(\mathbf{x})) = \|\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2$ si $\mathcal{P}$ est une projection orthogonale ;
   (c) $\|\mathbf{x} - \mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2$ si $\mathcal{P}$ est une projection orthogonale.

ii. On définit $\mathcal{A}$ sur un espace vectoriel réel E par $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$ où $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ désigne un élément particulier de E et où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrez que $\mathcal{A}$ est une application linéaire.
   (b) Déterminez la valeur non nulle de la constante α faisant de $\mathcal{A}$ une projection.
   (c) Déterminez dans ce cas l'expression de $\ker\mathcal{A}$ en fonction d'une base orthonormée $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ de E telle que $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$.

Tournez la page.

Question III

On résout numériquement le problème différentiel

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = f \\ x(0) = 0, \ \ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

où ω et f sont des constantes strictement positives en approchant celui-ci par le problème discret

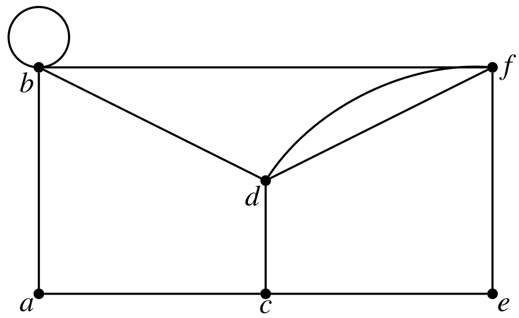
$$\begin{cases} \dfrac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2} + \omega^2 \dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{2} = f \\ x_0 = 0, \ \ x_1 = 0 \end{cases}$$

où Δt désigne le pas de temps d'intégration numérique.

Déterminez complètement la solution du problème discret dans le cas où $\omega \Delta t = \sqrt{2}$.

Question IV

i. Établissez la matrice d'adjacence du graphe ci-contre.
   Précisez, en justifiant vos réponses, si ce graphe est
   (a) connexe ?
   (b) simple ?
   (c) eulérien ?
   (d) semi-eulérien ?
   (e) hamiltonien ?



ii. Soit A la matrice d'adjacence d'un arbre. Reliez les éléments diagonaux $[\mathsf{A}^2]_{ii}$ aux degrés des noeuds correspondants.

iii. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe dont le nombre chromatique est égal à 2.
   (a) Montrez qu'on peut trouver une numérotation des nœuds telle que

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}$$

   où P désigne une matrice réelle.
   (b) Montrez que les puissances de la matrice A sont alternativement de la forme

$$\mathsf{A}^{2p} = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_{2p} & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_{2p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A}^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}_{2p+1} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}}_{2p+1} & 0 \end{pmatrix}$$

   où P_{2p+1}, Q_{2p} et R_{2p} désignent des matrices réelles.

SOLUTION

Question I

i. La matrice d'ordre 3 représentant $\boldsymbol{\kappa}$ dans une base quelconque est symétrique, donc normale. Dès lors, elle possède 3 vecteurs propres mutuellement orthogonaux permettant de définir un repère orthonormé dans lequel la loi de Darcy s'écrit au moyen d'une matrice diagonale.

ii. La question qui se pose ici est celle de la détermination des directions g pour lesquelles

$$\mathsf{q} = -\frac{1}{\mu}\mathsf{K}\mathsf{g} = -\gamma\,\mathsf{g} \quad \text{avec} \quad \gamma > 0$$

soit, puisque $\mu > 0$,

$$\mathsf{K}\mathsf{g} = \gamma^{\star}\,\mathsf{g} \quad \text{avec} \quad \gamma^{\star} = \mu\gamma > 0$$

Il s'agit donc de la détermination des vecteurs propres normés de K associés aux valeurs propres strictement positives.

- *Recherche des valeurs propres*
  Les valeurs propres de K s'obtiennent en multipliant par κ_0 les valeurs propres de $\mathsf{K}' = \mathsf{K}/\kappa_0$. Ces dernières sont les zéros de

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\,[(3-\lambda)(4-\lambda)-1]-(3-\lambda)$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = -(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-2)$$

  Ainsi, la matrice K possède trois valeurs propres simples strictement positives :

$$2\kappa_0, \quad 3\kappa_0 \quad \text{et} \quad 5\kappa_0$$

- *Recherche des vecteurs propres*
  Les vecteurs propres de la matrice K sont les mêmes que ceux de la matrice K'.
  ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 2$ sont les solutions w_1 non nulles de

$$(\mathsf{K}' - 2\mathbb{I})\mathsf{w}_1 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

  La matrice de ce système homogène peut être réduite à une forme échelonnée par des opérations élémentaires. Il vient

$$\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  puis

$$\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De là,

$$\mathsf{w}_1 = \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}_0$$

  ◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 3$ sont les solutions w_2 non nulles de

$$(\mathsf{K}' - 3\mathbb{I})\mathsf{w}_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

En permutant la première et la troisième ligne et en multipliant la deuxième ligne par (-1), ce système peut être écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Il vient ensuite

$$\begin{array}{l} \ell_3 \to \ell_3 - \ell_2 \\ \ell_1 \to \ell_1 - \ell_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

En permutant ensuite la deuxième et la troisième colonne (et les inconnues correspondantes), ce système équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = 0$$

De là,

$$\mathsf{w}_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}_0$$

◇ Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $\lambda = 5$ sont les solutions w_3 non nulles de

$$(\mathsf{K}' - 5\mathbb{I})\mathsf{w}_3 = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Il vient

$$\ell_1 \to -\ell_1/2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1 - \ell_2/2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\ell_2 \to -\ell_2/2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

De là,

$$\mathsf{w}_3 = \delta \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}_0$$

Il suffit de diviser ces vecteurs par leur norme pour obtenir les directions recherchées.

$$\mathbf{E}_1 = \frac{-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_3 = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{6}}$$

Question II

i. Soit $\mathcal{P}$ une projection définie sur $\mathtt{E}$ et $\mathbf{x}$ un élément quelconque de $\mathtt{E}$.

(a) Calculons l'image de $\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})$ par $\mathcal{P}$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})) &= \mathcal{P}(\mathbf{x})-\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{x})) && \text{car l'application est linéaire}\\ &= \mathcal{P}(\mathbf{x})-\mathcal{P}(\mathbf{x}) && \text{par définition d'une projection}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Dès lors $\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})$ appartient au noyau de $\mathcal{P}$.

(b) Si la projection $\mathcal{P}$ est orthogonale, on sait que

$$\forall \mathbf{y}\in \ker\mathcal{P}, \forall \mathbf{z}\in \operatorname{im}\mathcal{P} : (\mathbf{y}|\mathbf{z})=0$$

En particulier, puisque $\mathbf{y}=\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})\in\ker\mathcal{P}$, en vertu du point (a) ci-dessus, et que $\mathbf{z}=\mathcal{P}(\mathbf{x})\in\operatorname{im}\mathcal{P}$, il vient donc

$$\forall \mathbf{x}\in \mathtt{E} : (\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=0$$

En exploitant la linéarité (l'espace vectoriel est réel) du produit scalaire, il vient

$$(\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=(\mathbf{x}|\mathcal{P}(\mathbf{x}))-(\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=0$$

soit

$$(\mathbf{x}|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=\|\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2$$

(c) Pour tout $\mathbf{x}\in\mathtt{E}$, on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2 &= (\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x}))\\ &= (\mathbf{x}|\mathbf{x})-(\mathbf{x}|\mathcal{P}(\mathbf{x}))-(\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathbf{x})+(\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathcal{P}(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

Tenant compte de (b) et du fait que $\mathtt{E}$ est un espace vectoriel réel, on a

$$(\mathbf{x}|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=(\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathbf{x})=\|\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2$$

Dès lors,

$$\|\mathbf{x}-\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2=(\mathbf{x}|\mathbf{x})-(\mathcal{P}(\mathbf{x})|\mathcal{P}(\mathbf{x}))=\|\mathbf{x}\|^2-\|\mathcal{P}(\mathbf{x})\|^2$$

ii. Soit l'application définie sur $\mathtt{E}$ par

$$\mathcal{A}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}$$

(a) L'application est linéaire car, quelles que soient les constantes λ et μ et les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathtt{E}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}+\alpha(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}|\mathbf{a})\mathbf{a}\\ &= \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}+\alpha\Big[\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a})+\mu(\mathbf{y}|\mathbf{a})\Big]\mathbf{a}\\ &= \lambda\Big[\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}\Big]+\mu\Big[\mathbf{y}+\alpha(\mathbf{y}|\mathbf{a})\mathbf{a}\Big]\\ &= \lambda\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mu\mathcal{A}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

(b) L'application $\mathcal{A}$ est une projection si $\mathcal{A} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}$, soit si, $\forall \mathbf{x} \in \mathtt{E}$,

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \alpha(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$$

Puisque $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, cette condition est équivalente à

$$(\mathcal{A}(\mathbf{x})|\mathbf{a}) = 0$$

ou encore

$$(\mathbf{x} + \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a}|\mathbf{a}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a}) + \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{a})(\mathbf{a}|\mathbf{a}) = 0$$

Puisque cette égalité doit être vérifiée quel que soit $\mathbf{x} \in \mathtt{E}$, on en tire

$$\alpha = -\frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

(c) Les vecteurs $\mathbf{x}$ du noyau de $\mathcal{A}$ sont tels que $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, soit

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2}(\mathbf{x}|\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Développons cette expression en travaillant dans une base orthonormée $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ de $\mathtt{E}$ telle que $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$. Dans une telle base, on a

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{e}_1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

de sorte que

$$(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = x_1\|\mathbf{a}\|$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \\
&= \left(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\right) - \frac{x_1\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\|\mathbf{e}_1 \\
&= x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

Puisque les vecteurs $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots \mathbf{e}_n$ sont linéairement indépendants, il vient

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

Dès lors,

$$\ker \mathcal{A} = \left\{\mathbf{x} \in \mathtt{E} : \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1, x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathtt{E} : \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Question III

Dans le cas où $\omega\Delta t = \sqrt{2}$, l'équation aux différences prend la forme

$$x_{n+1} - x_n + x_{n-1} = \frac{1}{\omega^2} f$$

soit encore

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = \frac{1}{\omega^2} f$$

L'équation est linéaire . Sa solution générale peut être formée en additionnant la solution générale de l'équation homogène associée et une solution particulière de l'équation complète.

Pour résoudre l'équation homogène, puisque celle-ci est à coefficients constants, on cherche les zéros du polynôme caractéristique, *i.e.* les solutions de

$$z^2 - z + 1 = 0$$

On calcule

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \qquad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$x_n^h = A\, z_1^n + B\, z_2^n$$

où A et B sont des constantes.

Les zéros du polynôme caractéristique peuvent s'écrire sous la forme trigonométrique

$$z_1 = \mathrm{e}^{-i\pi/3}, \qquad z_2 = \mathrm{e}^{i\pi/3}$$

ce qui permet d'exprimer x_n^h sous la forme alternative

$$x_n^h = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Puisque le second membre de l'équation aux différences (à coefficients constants) est une simple constante, on recherche une solution particulière de la même forme, *i.e.* $x_n^p = \alpha$. En substituant cette expression dans l'équation différentielle, on trouve

$$x_n^p = \alpha = \frac{1}{\omega^2} f$$

La solution générale de l'équation s'écrit donc

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\omega^2} f$$

L'imposition des conditions initiales conduit à

$$\begin{cases} x_0 = 0 = C_1 + \dfrac{1}{\omega^2} f \\[2ex] x_1 = 0 = C_1 \dfrac{1}{2} + C_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\omega^2} f \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{\omega^2} f \\[2ex] C_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3\omega^2} f \end{cases}$$

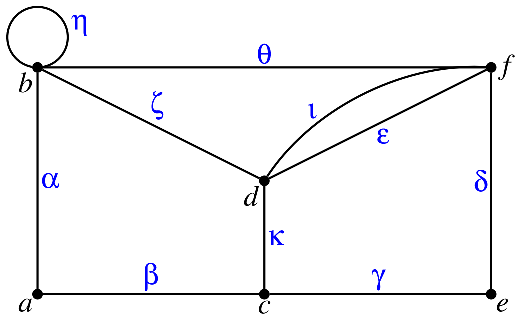
et

$$x_n = \frac{1}{\omega^2} f \left(1 - \cos\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3\omega^2} f \sin\frac{n\pi}{3}$$

Question IV

i. Considérant les nœuds du graphe dans l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence s'écrit

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(a) Le graphe est connexe puisqu'il existe un chemin reliant n'importe quelle paire de nœuds.

(b) Il n'est pas simple puisqu'il comporte une boucle sur le nœud b et deux arêtes entre les nœuds d et f.

(c) Le graphe n'est pas eulérien puisqu'il comporte des nœuds de dégrés impairs (les nœuds b et c). Rappelons qu'un graphe est eulérien si et seulement si les degrés de tous ses nœuds sont pairs.

(d) Le graphe est semi-eulérien puisqu'il est connexe et comporte exactement deux nœuds de degrés impairs (les nœuds b et c). On peut par exemple identifier la chaîne simple eulérienne :

$$b \xrightarrow{\alpha} a \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} e \xrightarrow{\delta} f \xrightarrow{\varepsilon} d \xrightarrow{\zeta} b \xrightarrow{\eta} b \xrightarrow{\theta} f \xrightarrow{\iota} d \xrightarrow{\kappa} c$$

(e) Le cycle

$$b \xrightarrow{\alpha} a \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{\gamma} e \xrightarrow{\delta} f \xrightarrow{\varepsilon} d \xrightarrow{\zeta} b$$

passe une et une seule fois par tous les nœuds du graphe et est donc hamiltonien ; le graphe est donc hamiltonien.

ii. Si A désigne la matrice d'adjacence d'un graphe, l'élément (i,i) de la matrice A^2 donne le nombre de chaînes de longueur 2 permettant de passer du nœud i à lui-même.
Pour tout graphe simple, qu'il s'agisse d'un arbre ou non, une telle chaîne est nécessairement constituée d'un aller-retour du type

$$i \xrightarrow{\alpha} k \xrightarrow{\alpha} i$$

où k désigne un nœud adjacent au nœud i et où α désigne l'unique arête incidente à ces deux nœuds. Le nombre de telles chaînes est donc égal au nombre d'arêtes incidentes au nœud i. Dès lors,

$$[\mathsf{A}^2]_{ii} = \text{degré du nœud } i$$

iii. Si le nombre chromatique d'une graphe est égal à deux, alors celui-ci est biparti ; la couleur portée par les nœuds définit une partition de ceux-ci en deux ensembles disjoints telle qu'aucune arête n'est incidente à deux nœuds portant la même couleur.

(a) Si, dans un graphe de n nœud, on numérote de 1 à k les nœuds verts et de $k+1$ à n les nœuds rouge, alors, la matrice d'adjacence (symétrique) A s'écrit sous la forme

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_{rr} & \mathsf{A}_{rv} \\ \mathsf{A}_{rv}^{\mathrm{T}} & \mathsf{A}_{vv} \end{pmatrix}$$

où les dimensions des matrices A_{rr}, A_{rv} et A_{vv} sont respectivement $k \times k$, $k \times (n-k)$ et $(n-k) \times (n-k)$. Les sous-matrices A_{rr} et A_{vv} décrivent respectivement les relations d'adjacence entre les nœuds rouges et les relations d'adjacence entre les nœuds verts. Comme il n'existe pas d'arête entre les nœuds d'une même couleur, on a

$$\mathsf{A}_{rr} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A}_{vv} = 0$$

La matrice d'adjacence s'écrit donc sous la forme annoncée

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \tag{$\dagger$}$$

avec $\mathsf{P} = \mathsf{A}_{rv}$.

(b) Plus généralement, écrivons A^k sous la forme

$$\mathsf{A}^k = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_{rr,k} & \mathsf{A}_{rv,k} \\ \mathsf{A}^{\mathrm{T}}_{rv,k} & \mathsf{A}_{vv,k} \end{pmatrix}$$

Dans un graphe biparti, tout parcours visite alternativement des nœuds de couleurs alternées. Toutes les chaînes de longueur impaire relient donc des nœuds de couleurs différentes. Dès lors, puisque $\mathsf{A}_{rr,k}$ et $\mathsf{A}_{vv,k}$ représentent le nombre de chaînes de longueur k reliant respectivement deux nœuds verts ou deux nœuds rouges entre eux, on en déduit que, pour tout k impair,

$$\mathsf{A}_{rr,k} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A}_{vv,k} = 0$$

Inversement, toutes les chaînes de longueur paire relient des nœuds d'une même couleur. Dès lors, pour toute valeur paire de k on a

$$\mathsf{A}_{rv,k} = 0$$

Par conséquent, les puissances successives de A sont de la forme

$$\mathsf{A}^{2p} = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_{2p} & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_{2p} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A}^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}_{2p+1} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}}_{2p+1} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\mathsf{P}_{2p+1} = \mathsf{A}_{rv,2p+1}$, $\mathsf{Q}_{2p} = \mathsf{A}_{rr,2p}$ et $\mathsf{R}_{2p} = \mathsf{A}_{vv,2p}$.

Remarquons que cette structure des puissances de la matrice A peut aussi être démontrée par calcul en exploitant la forme ($\dagger$) de A.
On note d'abord que

$$\mathsf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_2 & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_2 \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{Q}_2 = \mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}}$ et $\mathsf{R}_2 = \mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{P}$. Le produit de matrices diagonales par blocs (dont les tailles sont compatibles) étant obtenu en multipliant les blocs diagonaux correspondants, on a, comme annoncé

$$\mathsf{A}^{2p} = \left(\mathsf{A}^2\right)^p = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_2^p & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_{2p} & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_{2p} \end{pmatrix}$$

où $\mathsf{Q}_{2p} = \mathsf{Q}_2^p = (\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}})^p$ et $\mathsf{R}_{2p} = \mathsf{R}_2^p = (\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{P})^p$.

Pour les puissances impaires de A, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^{2p+1} = \mathsf{A}^{2p}\mathsf{A} &= \begin{pmatrix} \mathsf{Q}_{2p} & 0 \\ 0 & \mathsf{R}_{2p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{Q}_{2p}\mathsf{P} \\ \mathsf{R}_{2p}\mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\right)^p\mathsf{P} \\ \left(\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{P}\right)^p\mathsf{P}^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathsf{P}_{2p+1} \\ \mathsf{P}^{\mathrm{T}}_{2p+1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\mathsf{P}_{2p+1} = \left(\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\right)^p\mathsf{P}$.