LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2018

MATH0013-2 - ALGÈBRE

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

Le tenseur de conductivité thermique $\mathcal{K}$ décrit les propriétés de diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Dans une base orthonormée, les composantes du flux de chaleur $\mathbf{J}$ et du gradient de température ∇T sont liées par la relation matricielle

$$\mathsf{J} = -\mathsf{K}\nabla T$$

où K désigne les composantes de $\mathcal{K}$ dans cette base. Dans la base orthonormée particulière $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, on a

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 4+\alpha & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $k_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles il existe une base orthonormée dans laquelle le tenseur $\mathcal{K}$ est représenté par une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont strictement positifs.

ii. Dans le cas où $\alpha = 0$, déterminez en fonction de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ toutes les valeurs de ∇T auxquelles correspond un flux de chaleur non nul $\mathbf{J}$ dans la même direction que ∇T mais de sens opposé.

Question II

i. Déterminez le polynôme caractéristique associé à

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

(où α_0, α_1,..., α_{n-1} sont des paramètres réels) dans le cas particulier où $n = 4$.

ii. Soit une application linéaire $\mathcal{A}$ de $\mathtt{E}$ vers $\mathtt{F}$ et une application linéaire $\mathcal{B}$ de $\mathtt{F}$ vers $\mathtt{G}$. On note $\tilde{\mathtt{F}} = \operatorname{im}\mathcal{A}$ et on définit $\tilde{\mathcal{B}}$ comme la restriction de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathtt{F}}$, i.e.

$$\tilde{\mathcal{B}} : \tilde{\mathtt{F}} \to \mathtt{G}, \qquad \mathbf{y} \in \tilde{\mathtt{F}} \mapsto \mathcal{B}(\mathbf{y}) \in \mathtt{G}$$

(a) Définissez mathématiquement et en français $\operatorname{im}\mathcal{A}$.
(b) Définissez mathématiquement et en français $\ker\mathcal{B}$.
(c) Définissez mathématiquement $\rho(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})$.
(d) Énoncez le théorème du rang pour $\tilde{\mathcal{B}}$.
(e) Montrez que $\rho(\mathcal{B}\circ\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}) - \dim(\operatorname{im}\mathcal{A}\cap\ker\mathcal{B})$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Le tenseur $\mathcal{K}$ est représenté par une matrice symétrique, donc normale, quels que soient $k_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On peut donc toujours trouver une base orthonormée dans laquelle le tenseur $\mathcal{K}$ est représenté par une matrice D diagonale.

   Les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de K. Ils sont tous strictement positifs si et seulement si K est définie positive. Par application du critère de Sylvester, on peut affirmer que K est définie positive si et seulement si

$$k_0(4+\alpha) > 0$$

$$k_0^2 \begin{vmatrix} 4+\alpha & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = k_0^2(8+2\alpha-\alpha^2) = k_0^2(4-\alpha)(2+\alpha) > 0$$

$$k_0^3 \begin{vmatrix} 4+\alpha & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k_0^3\left[8+2\alpha-8-\alpha^2\right] = k_0^3\alpha(2-\alpha) > 0$$

   Ces conditions sont vérifiées simultanément pour

$$\alpha \in \ ]-4,+\infty[\ \cap\ ]-2,4[\ \cap\ ]0,2[$$

   soit si et seulement si $\alpha \in]0,2[$.

ii. Dans le cas où $\alpha = 0$, on a

$$\mathsf{K} = k_0 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Les valeurs de ∇T recherchées sont telles que

$$\mathsf{J} = -\mathsf{K}\nabla T = -\mu\, \nabla T$$

   avec $\mathsf{J} \neq 0$ et $\mu > 0$. Il s'agit donc des vecteurs propres de K relatifs à ses valeurs propres strictement positives.

   Recherche des valeurs propres de K.

   Elles sont données par celles de la matrice K/k_0 multipliées par k_0. Les valeurs propres de K/k_0 sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\det\left(\frac{\mathsf{K}}{k_0} - \lambda\mathbb{I}\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\lambda(\lambda-5)$$

   Les valeurs propres de K sont donc simples et égales à

$$0,\ 2k_0,\ 5k_0$$

   Recherche des vecteurs propres de K.

   - Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 ne répondent pas à l'énoncé et ne doivent pas être recherchés.

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2k_0$ sont les solutions non nulles du système

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

  Il vient successivement, en commençant par diviser la première ligne par 2 et permuter les deuxième et troisième lignes,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1) \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(\ell_2 \to -\ell_2/3) \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

  enfin

$$(\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2) \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

  Par inspection de ce résultat ou en permutant les deux dernières colonnes, on obtient les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $2k_0$:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \forall\gamma \in \mathbb{R}_0$$

- Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $5k_0$ sont les solutions non nulles du système

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

  On calcule successivement

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}(\ell_1 \to -\ell_1)\\ (\ell_2 \to -\ell_2/3)\\ (\ell_3 \to \ell_3/2)\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$(\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1) \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

  Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre $5k_0$ sont donnés par

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \delta\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \forall\delta \in \mathbb{R}_0$$

Les valeurs de ∇T recherchées sont donc celles qui peuvent s'écrire sous une des deux formes

$$\gamma\mathbf{e}_2 \qquad \text{ou} \qquad \delta(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

où γ et δ diffèrent de zéro.

Question II

i. Dans le cas où $n = 4$, le polynôme caractéristique associé à la matrice C est donné par

$$\operatorname{dtm}(\mathsf{C} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 - \lambda \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{dtm}(\mathsf{C} - \lambda\mathbb{I}) &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -\lambda & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 - \lambda \end{vmatrix} + (-1)^5(-\alpha_0) \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -\lambda & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 - \lambda \end{vmatrix} + \alpha_0 \end{aligned}$$

Poursuivant le développement selon le même principe, on a successivement

$$\begin{aligned} \operatorname{dtm}(\mathsf{C} - \lambda\mathbb{I}) &= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_3 - \lambda \end{vmatrix} + \lambda\alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \alpha_0 \\ &= \lambda^2(\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_2) + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \\ &= \lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \end{aligned}$$

ii. (a) L'application linéaire $\mathcal{A}$ étant définie de $\mathtt{E}$ vers $\mathtt{F}$, on appelle $\operatorname{im}\mathcal{A}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathtt{F}$ qui sont l'image par $\mathcal{A}$ d'au moins un élément de $\mathtt{E}$, soit mathématiquement

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \left\{\mathbf{y} \in \mathtt{F} : \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{x} \in \mathtt{E}\right\}$$

ou, de façon plus compacte,

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \left\{\mathcal{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathtt{E}\right\}$$

(b) L'application linéaire $\mathcal{B}$ étant définie de $\mathtt{F}$ vers $\mathtt{G}$, on appelle noyau de $\mathcal{B}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathtt{F}$ dont l'image par $\mathcal{B}$ est le vecteur nul de $\mathtt{G}$, soit mathématiquement

$$\ker\mathcal{B} = \left\{\mathbf{y} \in \mathtt{F} : \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_{\mathtt{G}}\right\}$$

(c) Le rang de la composition des applications linéaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est la dimension de l'image de $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$, *i.e.*

$$\rho(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \dim\left(\operatorname{im}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})\right)$$

(d) L'application linéaire $\tilde{\mathcal{B}}$ étant définie sur $\tilde{\mathtt{F}}$, le théorème du rang pour $\tilde{\mathcal{B}}$ s'écrit

$$\dim\tilde{\mathtt{F}} = \dim(\ker\tilde{\mathcal{B}}) + \rho(\tilde{\mathcal{B}})$$

(e) Le théorème du rang ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$\rho(\tilde{\mathcal{B}}) = \dim\tilde{\mathtt{F}} - \dim(\ker\tilde{\mathcal{B}})$$

dont les trois termes peuvent être transformés de la façon suivante.

- L'image de $\tilde{\mathcal{B}}$ est constituée de tous les vecteurs de $\mathtt{G}$ qui sont les images des éléments de $\tilde{\mathtt{F}}$ par $\mathcal{B}$. Les éléments de $\tilde{\mathtt{F}}$ étant eux-mêmes les images des éléments de $\mathtt{E}$ par $\mathcal{A}$,

$$\operatorname{im}(\tilde{\mathcal{B}}) = \operatorname{im}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) \qquad \text{et} \qquad \rho(\tilde{\mathcal{B}}) = \rho(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$$

- Par définition, $\tilde{\mathtt{F}} = \operatorname{im} \mathcal{A}$. Dès lors,

$$\dim \tilde{\mathtt{F}} = \dim(\operatorname{im} \mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A})$$

- Les éléments formant le noyau de $\tilde{\mathcal{B}}$ sont les éléments de $\tilde{\mathtt{F}} = \operatorname{im} \mathcal{A}$ dont l'image par $\mathcal{B}$ est égale au vecteur nul $\mathbf{0}_{\mathtt{G}}$ de $\mathtt{G}$. Ils appartiennent donc à $\ker \mathcal{B}$, de sorte que

$$\ker \tilde{\mathcal{B}} = \operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad \dim(\ker \tilde{\mathcal{B}}) = \dim(\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B})$$

Dès lors, on obtient comme annoncé

$$\rho(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}) - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B})$$