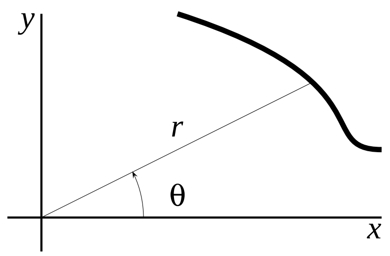
Annexe C

Courbes et surfaces usuelles.

C.1 Courbes planes en coordonnées polaires.

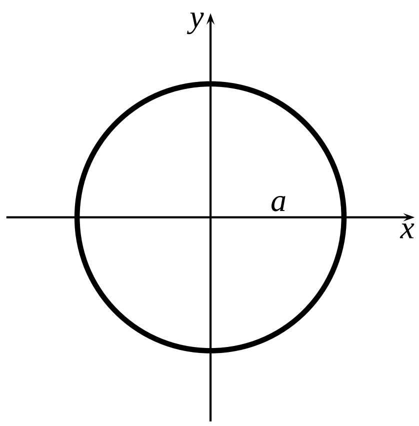
Cette section présente quelques courbes planes et leurs équations en coordonnées polaires définies par (Cf. page 347)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

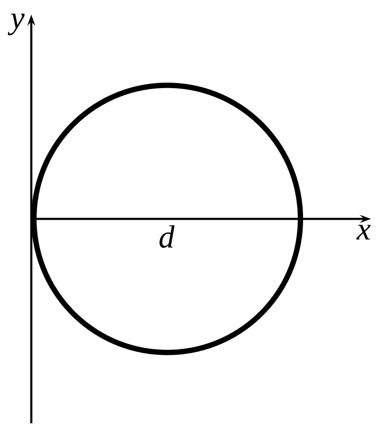
Cercle de rayon a centré à l'origine des axes :

$$r = a$$



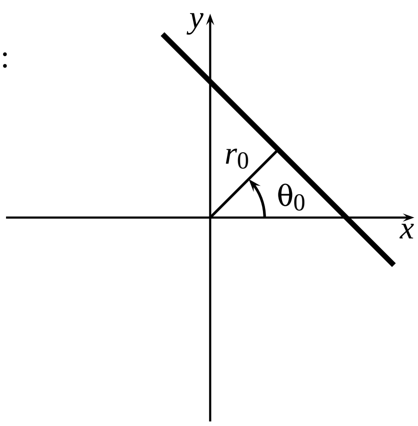
Cercle de diamètre d passant par l'origine des axes :

$$r = d\cos\theta$$



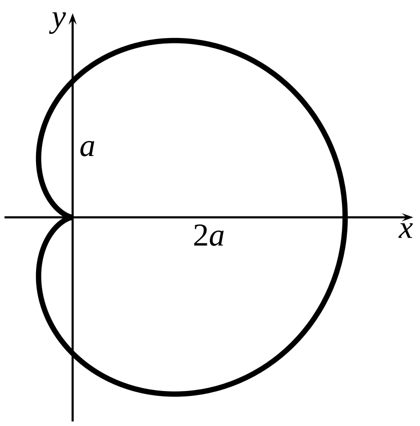
Droite perpendiculaire à la direction $\theta = \theta_0$ passant par le point $r = r_0$, $\theta = \theta_0$:

$$r = \frac{r_0}{\cos(\theta - \theta_0)}$$



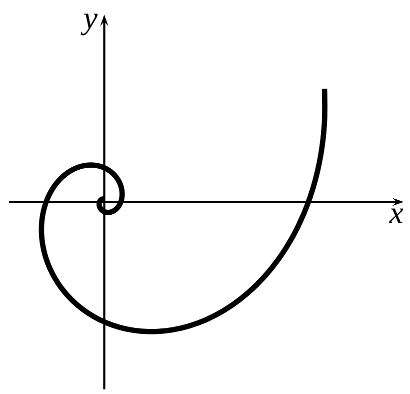
Cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta)$$



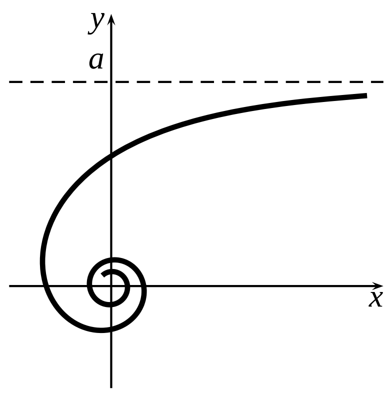
Spirale logaritmique ($a > 0$, $n > 0$) :

$$r = a\,\mathrm{e}^{n\theta}$$



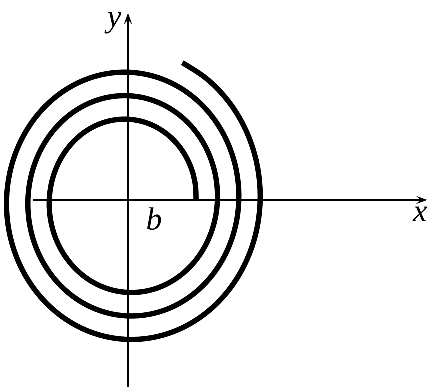
Spirale hyperbolique ($a > 0$, $\theta > 0$) :

$$r\theta = a$$



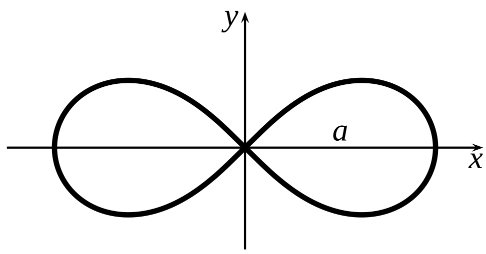
Spirale d'Archimède ($a > 0$, $b > 0$) :

$$r = a\theta + b$$



Lemniscate de Bernoulli :

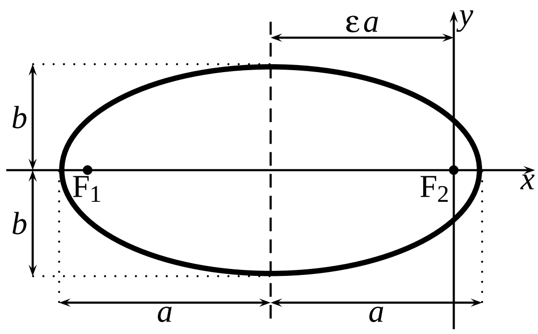
$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$



Ellipse :

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

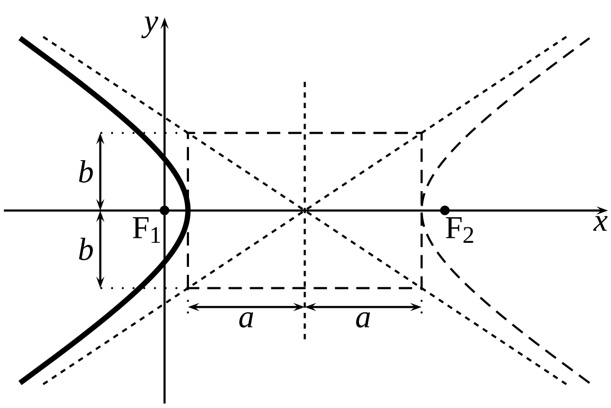
$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$$



Hyperbole :

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

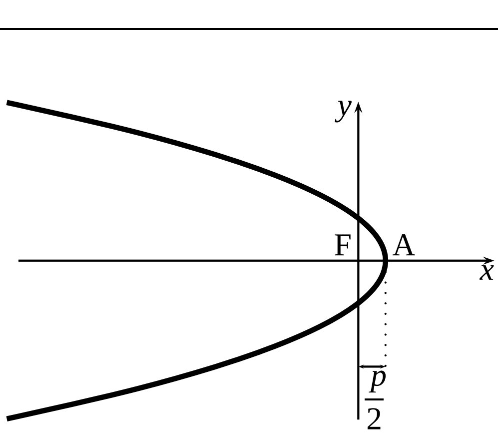
$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$



Parabole :

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

$$\mathrm{AF} = \frac{\mathrm{p}}{2}, \qquad \varepsilon = 1$$



C.2 Surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Cette section présente quelques surfaces usuelles de $\mathbb{R}^3$, leurs équations en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques et leurs représentations graphiques.

C.2.1 Sphère et ellipsoïdes.

Sphère centrée à l'origine des axes.

— coordonnées cartésiennes :

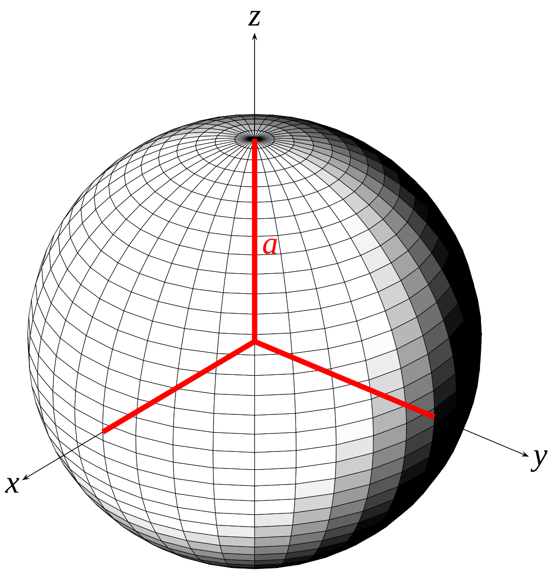
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

— coordonnées cylindriques :

$$r^2 + z^2 = a^2$$

— coordonnées sphériques :

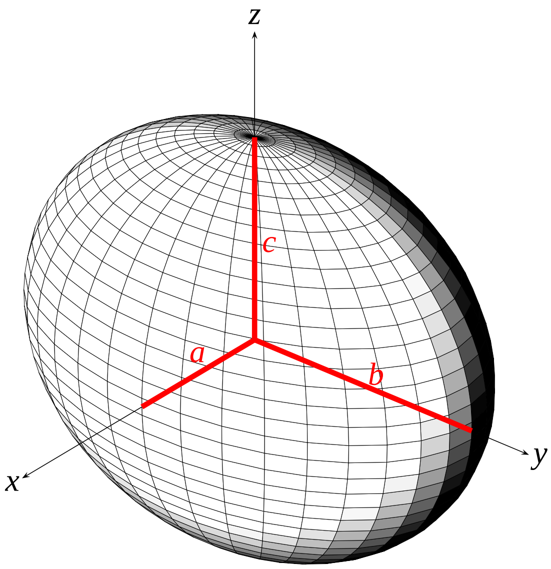
$$r = a$$



Ellipsoïde (cas général).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(coordonnées cartésiennes)



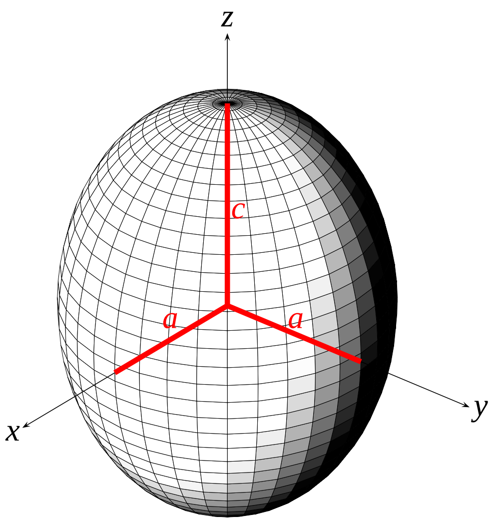
Ellipsoïde de révolution.

— coordonnées cartésiennes :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

— coordonnées cylindriques :

$$\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



C.2.2 Cylindres.

Un cylindre est une surface définie par une droite de direction fixe, la génératrice, passant par un point variable décrivant une courbe plane fermée appelée courbe directrice.

On peut reconnaître un cylindre d'axe parallèle à un axe du repère cartésien par l'absence de la coordonnée correspondante dans son équation cartésienne. N'importe quelle courbe plane du plan $z=0$ peut donc générer un cylindre dont l'équation est l'équation de la courbe plane.

Cylindre circulaire d'axe OZ de rayon a.

— coordonnées cartésiennes :

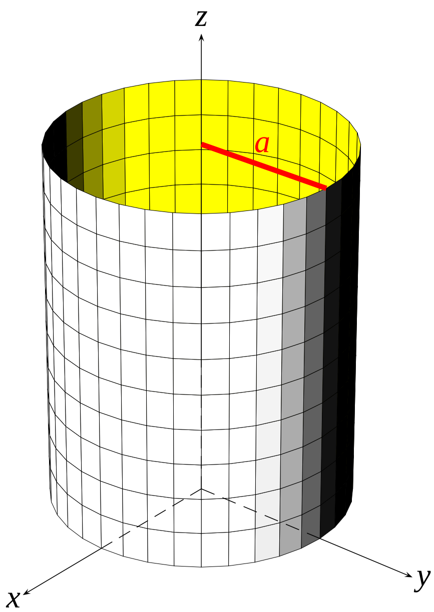
$$x^2+y^2=a^2$$

— coordonnées cylindriques :

$$r=a$$

Si l'axe du cylindre passe par le point (x_0,y_0) l'équation cartésienne devient

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2$$

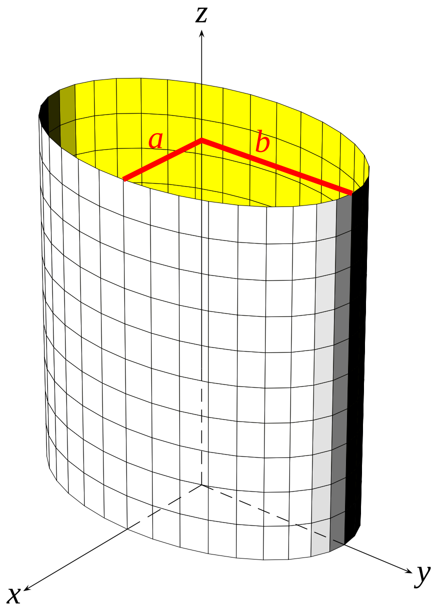


Cylindre elliptique d'axe OZ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

(coordonnées cartésiennes)

La section par un plan $z=$ constante est l'ellipse de demi-axes a et b.



C.2.3 Cônes.

Un cône est une surface définie par une droite, la génératrice, passant par un point fixe, appelé le sommet du cône, et un point variable décrivant une courbe plane fermée appelée courbe directrice.

Cône circulaire d'axe OZ d'angle d'ouverture α.

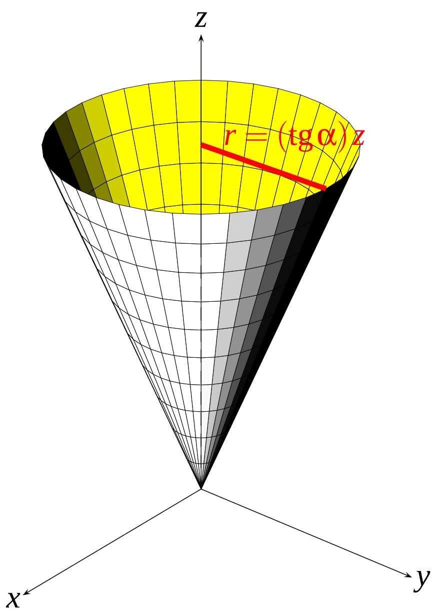
— Coordonnées cartésiennes :

$$x^2+y^2=(\mathrm{tg}^2\,\alpha)\,z^2$$

— Coordonnées cylindriques :

$$r=(\mathrm{tg}\,\alpha)\,z$$

La section par un plan $z=h$ est un cercle de rayon proportionnel à h.

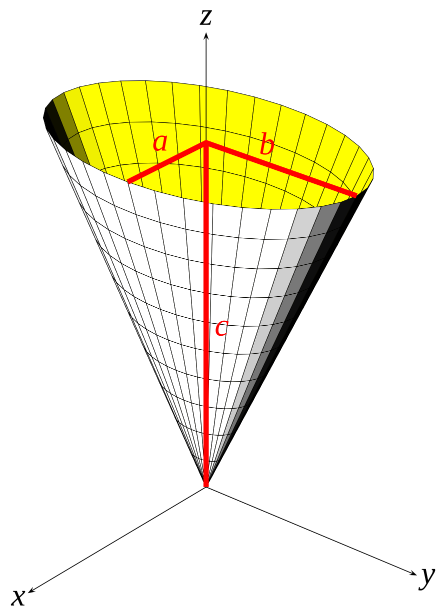


Cône elliptique d'axe OZ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

(coordonnées cartésiennes)

La section par un plan $z=h$ est une ellipse dont les dimensions des demi-axes sont proportionnelles à h.



C.2.4 Paraboloïdes.

Dans un paraboloïde d'axe OZ, les dimensions de la section croissent proportionnellement à la racine carrée de la coordonnée z. La section par un plan vertical quelconque est une parabole.

Paraboloïde de révolution d'axe OZ.

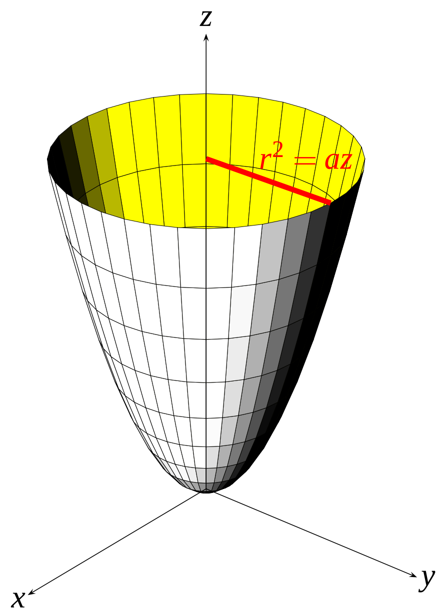
— Coordonnées cartésiennes $(a>0)$:

$$x^2+y^2=az$$

— Coordonnées cylindriques :

$$r^2=az$$

Le paraboloïde est obtenu par rotation de la parabole $x^2=az$ autour de l'axe OZ.



Paraboloïde elliptique.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

(coordonnées cartésiennes)

La section par un plan $z =$ constante est une ellipse.