Annexe B

Fonctions transcendantes.

Ce chapitre rassemble les définitions précises des principales fonctions transcendantes. Les outils analytiques développés dans les différentes parties du cours permettent d'en déduire les propriétés usuelles directement à partir des définitions.

B.1 Fonction logarithme.

En écrivant la primitive des fonctions rationnelles x^n où n est un entier positif ou négatif, nous avons précisé que $n \neq -1$. Néanmoins, la fonction $1/x$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet une primitive. Celle-ci ne s'exprime cependant pas à l'aide de fonctions rationnelles.

On définit la fonction *logarithme* ou *logarithme népérien* comme étant la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{x}$ égale à 0 pour $x = 1$, soit

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad x \in]0,+\infty[\tag{B.1}$$

La fonction $1/x$ étant strictement positive et continue sur $]0,+\infty[$, la fonction ln est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Les dérivées successives de ln étant également continues sur $]0,+\infty[$, la fonction logarithme est indéfiniment continûment dérivable sur cet intervalle.

On a [1]

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} > 0 \qquad \forall x \in]0,+\infty[\tag{B.2}$$

La fonction ln est donc strictement croissante sur son domaine de définition (Fig. B.1). Comme, par définition, elle est nulle en $x = 1$, elle est strictement négative pour $x < 1$ et strictement positive pour $x > 1$.

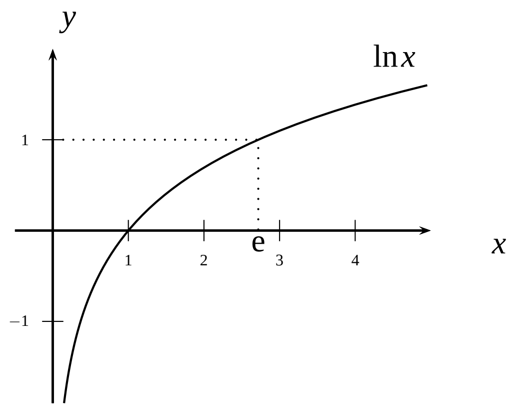

FIGURE B.1

La fonction ln vérifie la loi

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \forall\, a, b > 0 \tag{B.3}$$

En effet,

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}(\ln a + \ln x) \qquad x \in]0, +\infty[$$

de sorte que les fonctions $\ln ax$ et $\ln a + \ln x$ sont deux primitives de $1/x$. En vertu du thèorème de structure des primitives, ces deux fonctions ne peuvent différer que par une constante additive C. Or, puisqu'elles sont égales en $x = 1$, la constante C est nulle et

$$\ln ax = \ln a + \ln x \qquad x \in]0, +\infty[$$

En posant $x = b$, on obtient le résultat annoncé.

Dès lors,

$$0 = \ln 1 = \ln\left(x\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}$$

---

1. Remarquons que, si $x < 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Dès lors

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1 \quad \text{sur }]-\infty, 0[\qquad \text{et} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2 \quad \text{sur }]0, +\infty[$$

et donc

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x \qquad \forall x > 0 \tag{B.4}$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \qquad \forall\, a, b > 0 \tag{B.5}$$

$$\ln x^n = n \ln x \qquad \forall\, n \text{ entier et } x > 0 \tag{B.6}$$

Ces relations permettent de déduire les limites de $\ln x$ quand x tend vers $+\infty$ et vers 0^+, soit

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \tag{$B.7$}$$

En effet, pour tout $C > 0$, on peut trouver un entier $n \geq \dfrac{C}{\ln 2}$ tel que, pour $x \geq 2^n$,

$$\ln x \geq \ln 2^n = n \ln 2 \geq C$$

et donc

$$\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

Le comportement à l'origine s'en déduit aussitôt puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\lim_{x\to 0^+} \ln\frac{1}{x} = -\infty$$

Ceci montre que la fonction $1/t$ n'est pas intégrable sur $]0, x[$ pour tout $x > 0$.

La fonction logarithme tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ moins vite que n'importe quelle puissance et n'importe quelle racine de x. En effet, quel que soit l'entier $n > 0$, il vient par application du théorème de l'Hospital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{1/n}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n}{x^{1/n}} = 0$$

et a fortiori

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{n x^n} = 0$$

de sorte

$$\ln x = o(x^{1/n}), \quad x \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.8$}$$

et

$$\ln x = o(x^n), \quad x \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.9$}$$

De même,

$$\ln x = o(x^{-1/n}), \quad x \to 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.10$}$$

B.1.1 Logarithme de base a.

À partir de la fonction ln, on définit la fonction *logarithme de base a* ($a \in]0,+\infty[, a \neq 1$) par la relation

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{B.11}$$

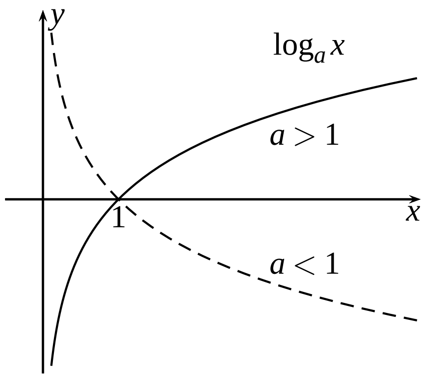

FIGURE B.2

Les propriétés de cette fonction se déduisent directement de celles de ln. Ainsi, $\log_a$ est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \tag{B.12}$$

Elle est donc strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$. De plus,

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1 \tag{B.13}$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1 \\ -\infty \text{ si } a < 1 \end{cases} \tag{B.14}$$

B.2 Fonctions puissance et exponentielle.

La *fonction exponentielle*, exp, est la fonction réciproque de la fonction logarithme :

$$y = \exp x \in]0,+\infty[\qquad \Leftrightarrow \qquad x = \ln y \in]-\infty,+\infty[\tag{B.15}$$

Cette définition est licite puisque la fonction logarithme est strictement croissante sur son intervalle de définition $]0,+\infty[$ et prend ses valeurs dans $]-\infty,+\infty[$; la fonction réciproque est donc une fonction positive strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

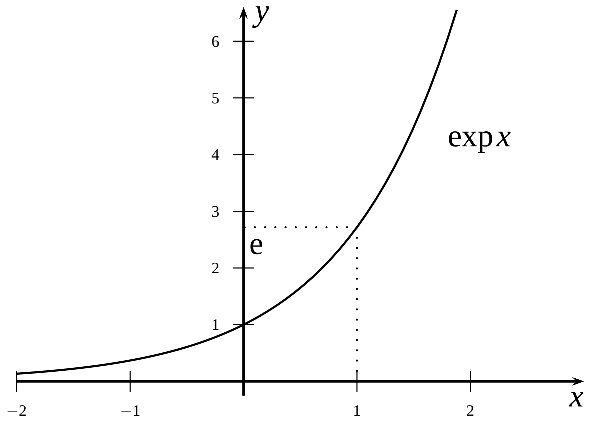

FIGURE B.3

On pose

$$\mathrm{e} = \exp 1 \qquad \text{et donc} \qquad \ln \mathrm{e} = 1 \tag{B.16}$$

D'autre part,

$$\ln 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exp 0 = 1 \tag{B.17}$$

Il existe de nombreuses définitions équivalentes de la fonction exponentielle. Ainsi, outre (B.15), on peut encore définir cette fonction comme

— la solution unique de l'équation différentielle

$$f'(x) = f(x) \qquad \text{avec} \qquad f(0) = 1 \tag{B.18}$$

— la série de puissances

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{B.19}$$

— l'expression

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{B.20}$$

La fonction $y = \exp x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme réciproque de la fonction logarithme (strictement monotone et dérivable). Par application de la règle de dérivation des fonctions réciproque, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\ln y\Big|_{y=\exp x}} = y(x) = \exp x$$

et donc

$$(\exp x)' = \exp x \tag{B.21}$$

La définition équivalente (B.18) s'en déduit aussitôt puisque la solution du problème de Cauchy (B.18) est unique sur $]-\infty,+\infty[$.

Tenant compte de (B.21), l'application de la formule de MacLaurin à la fonction exponentielle donne, pour tout x réel,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \qquad \text{où} \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1} \exp \theta x}{(n+1)!} \qquad \theta \in]0,1[$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, il vient, selon que x est positif ou négatif,

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp x \qquad \text{ou} \qquad |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dans les deux cas,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

et la fonction exponentielle est donc représentée par la série (B.19) pour tout x.

La définition (B.20) de l'exponentielle peut également se déduire des précédentes. En effet, pour tout x réel, écrivons

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp \ln \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp \lim_{n\to\infty} \ln \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

puisque exp est continue. Il suffit dès lors de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x$$

Or, puisque $\ln 1 = 0$,

$$\ln \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1+\frac{x}{n}\right) = x \left(\frac{\ln(1+x/n) - \ln 1}{x/n}\right)$$

Or, pour $x \neq 0$ fixé, x/n tend vers zéro lorsque $n \to \infty$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1+x/n) - \ln 1}{x/n}\right) = \frac{d \ln}{dx}(1) = 1$$

Dès lors,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x$$

La fonction exponentielle vérifie la loi de multiplication

$$\exp(a+b) = \exp a \ \exp b \quad \forall a,b \in \mathbb{R} \tag{B.22}$$

puisque

$$\ln\exp(a+b) = a+b = \ln\exp a + \ln\exp b = \ln(\exp a \exp b)$$

et que la fonction logarithme est biunivoque.

Dès lors,

$$1 = \exp 0 = \exp(x-x) = \exp x \ \exp(-x)$$

et donc

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \tag{B.23}$$

$$\exp(nx) = (\exp x)^n \ \forall n \text{ entier} \tag{B.24}$$

D'après le graphe de $\exp x$ obtenu en prenant le symétrique de celui de $\ln x$ par rapport à la bissectrice principale, les limites de $\exp x$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$ sont données par

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty \tag{$B.25$}$$

La fonction exponentielle croît plus vite que n'importe quelle puissance de x lorsque $x \to +\infty$. En effet, pour tout entier $n > 0$, il vient, par n applications successives du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{\exp x} = 0$$

Dès lors,

$$x^n = o(\exp x), \quad x \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.26$}$$

Inversement,

$$\exp(-x) = o(x^{-1/n}), \quad x \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.27$}$$

et

$$\exp(-x) = o(x^{-n}), \quad x \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{$B.28$}$$

B.2.1 Exponentielle généralisée d'argument a.

À partir de la fonction exponentielle, on définit la *fonction exponentielle généralisée d'argument a* ($a \in]0,+\infty[$) par la relation

$$a^x = \exp(x \ln a) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{$B.29$}$$

C'est la fonction inverse de la fonction logarithme de base a.

Évidemment, $\mathrm{e}^x = \exp x$ et la fonction $\exp x$ peut être considérée comme représentant l'argument e affecté de l'exposant x. On a aussi

$$1^x = 1, \qquad a^0 = 1, \qquad a^1 = a \tag{$B.30$}$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x b^x = (ab)^x \tag{$B.31$}$$

et
$$\ln a^x = x \ln a \qquad (B.32)$$

Les propriétés de la fonction exponentielle généralisée se déduisent de celles de la fonction exponentielle. Ainsi, a^x est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est donnée par
$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\exp(x \ln a) = \ln a \exp(x \ln a) = \ln a \, a^x \qquad (B.33)$$
La fonction exponentielle généralisée est donc strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est égale à 1 si $a = 1$.

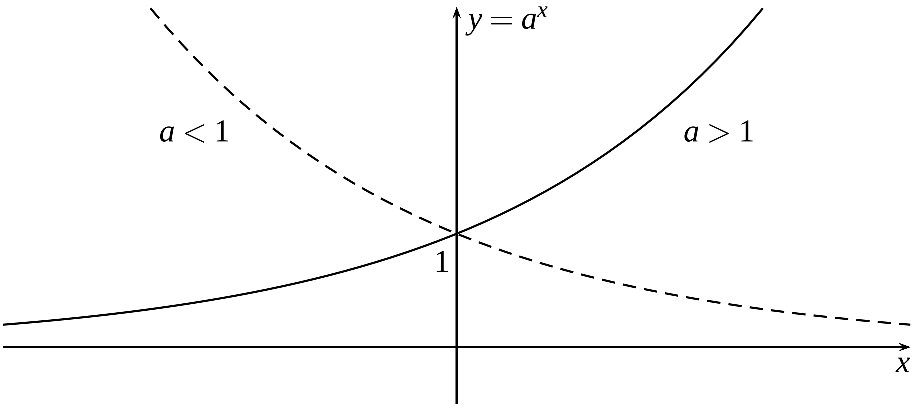

FIGURE B.4

De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases} \qquad \text{(B.34)}$$

B.2.2 Puissance généralisée d'exposant a.

On peut encore généraliser la notion d'exposant en posant
$$x^a = \exp(a \ln x) > 0, \qquad x \in]0, +\infty[\qquad \text{(B.35)}$$
qui définit la *puissance généralisée d'exposant a* ($a \in \mathbb{R}$).

Lorsque a est égal à un entier positif m ou un entier négatif $-n$, on retrouve la fonction puissance habituelle puisque
$$x^m = \exp(m \ln x) = \underbrace{\exp(\ln x)\exp(\ln x)\cdots\exp(\ln x)}_{m \text{ facteurs}} = \underbrace{x x \cdots x}_{m \text{ faceurs}}$$

et

$$x^{-n} = \exp(-n\ln x) = \underbrace{\exp(-\ln x)\exp(-\ln x)\cdots\exp(-\ln x)}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{\frac{1}{x}\frac{1}{x}\cdots\frac{1}{x}}_{n \text{ facteurs}}$$

Dans ces deux cas, la définition (B.35) peut donc être étendue, respectivement, à $x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_0$ en utilisant les définitions classiques.

On a

$$x^0 = 1, \qquad 1^a = 1 \tag{B.36}$$

et

$$x^a x^b = x^{a+b}, \qquad (x^a)^b = x^{ab}, \qquad x^a y^a = (xy)^a, \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \tag{B.37}$$

et

$$\ln x^a = a \ln x \tag{B.38}$$

La fonction x^a est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par

$$\frac{d}{dx}x^a = \frac{d}{dx}\exp(a\ln x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln x) = ax^{a-1} \tag{B.39}$$

La fonction x^a est donc strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$. Elle est égale à 1 si $a = 0$.

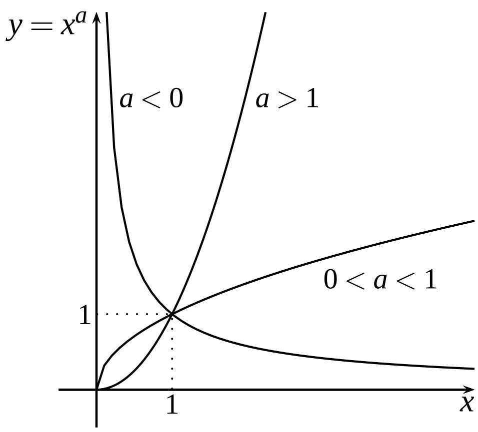

FIGURE B.5

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \tag{B.40}$$

B.3 Fonctions hyperboliques.

Les fonctions hyperboliques sont définies par des combinaisons de la fonction exponentielle. Comme leurs propriétés sont proches de celles des fonctions trigonométriques classiques, leurs noms en sont dérivés.

Les principales *fonctions hyperboliques* sont

le *cosinus hyperbolique* $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{B.41}$$

le *sinus hyperbolique* $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{B.42}$$

la *tangente hyperbolique* $$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{B.43}$$

la *cotangente hyperbolique* $$\coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{B.44}$$

Les propriétés des ces fonctions se déduisent de celles de l'exponentielle.

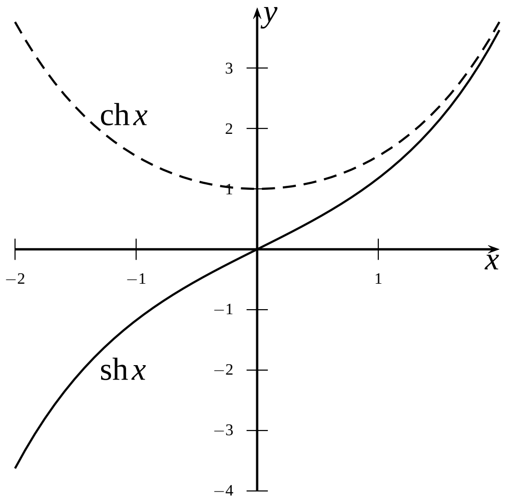

FIGURE B.6

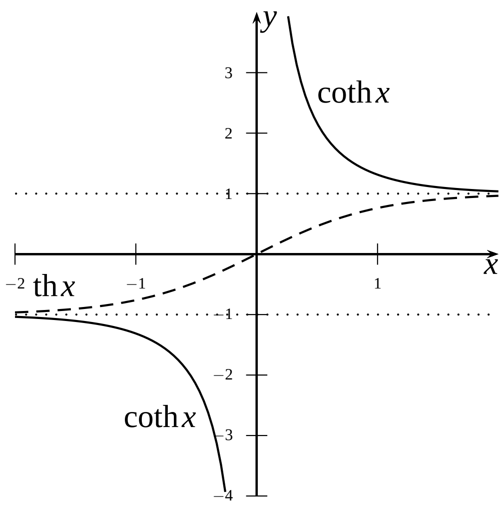

FIGURE B.7

	$y = \operatorname{sh} x$	$y = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{th} x$	$y = \coth x$
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$
$y \in$	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty[$	$]-1,1[$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$
continu et dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$
$\lim_{x\to+\infty} y$	$+\infty$	$+\infty$	1	1
$\lim_{x\to-\infty} y$	$-\infty$	$+\infty$	-1	-1
$\lim_{x\to 0^\pm} y$	0	1	0	$\pm\infty$
$y'(x)$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\int y(x)dx$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\ln\lvert\operatorname{ch} x\rvert$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$
paire/impaire	impaire	paire	impaire	impaire

Ces fonctions satisfont à des relations analogues à celles des fonctions sin et cos. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(x+y) &= \frac{\mathrm{e}^{(x+y)}+\mathrm{e}^{-(x+y)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y}}{2} \\ &= \frac{(\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,y)+(\mathrm{ch}\,x-\mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}\,y-\mathrm{sh}\,y)}{2} \\ &= \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y\end{aligned} \tag{B.45}$$

De même,

$$\mathrm{sh}(x\pm y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,y\,\mathrm{ch}\,x \tag{B.46}$$

$$\mathrm{ch}(x\pm y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,y\,\mathrm{sh}\,x \tag{B.47}$$

$$\mathrm{th}(x\pm y) = \frac{\mathrm{th}\,x \pm \mathrm{th}\,y}{1\pm \mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,y} \tag{B.48}$$

En particulier [2],

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \tag{B.49}$$

On a aussi

$$\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = \mathrm{e}^{x} \tag{B.50}$$

$$\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = \mathrm{e}^{-x} \tag{B.51}$$

2. Cette relation permet de justifier l'appellation de fonctions hyperboliques. En effet, la courbe définie de façon paramétrique par $x = \mathrm{ch}\,t$, $y = \mathrm{sh}\,t$ est une hyperbole équilatère puisque $x^2 - y^2 = 1$. Dès lors, $\mathrm{sh}\,t$, $\mathrm{ch}\,t$, $\mathrm{th}\,t$ possèdent une interprétation sur le graphe de l'hyperbole analogue à celle des fonctions classiques sur le cercle trigonométrique.

B.3.1 Fonctions hyperboliques inverses.

Les fonctions hyperboliques inverses sont

	$y = \operatorname{arcsh} x$	$y = \operatorname{arch} x$	$y = \operatorname{arcth} x$	$y = \operatorname{arcoth} x$
$x \in$	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty[$	$]-1, 1[$	$\mathbb{R} \backslash [-1, 1]$
$y \in$	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_0$
continu sur	$\mathbb{R}$	$[1, +\infty[$	$]-1, 1[$	$\mathbb{R} \backslash [-1, 1]$
$\lim\limits_{x \to +\infty} y$	$+\infty$	$+\infty$		0^+
$\lim\limits_{x \to -\infty} y$	$-\infty$			0^-
dérivable sur	$\mathbb{R}$	$]1, +\infty[$	$]-1, 1[$	$\mathbb{R} \backslash [-1, 1]$
$y'(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
paire/impaire	impaire		impaire	impaire

Les dérivées des fonctions inverses sont obtenues à partir de la règle de dérivation de l'inverse (1.187). Ainsi, par exemple,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsh} x = \frac{1}{\left.\frac{d}{dy} \operatorname{sh} y\right|_{y=\operatorname{arcsh} x}} = \frac{1}{\left.\operatorname{ch} y\right|_{y=\operatorname{arcsh} x}} = \frac{1}{\left.\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}\right|_{y=\operatorname{arcsh} x}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Alors que les fonctions hyperboliques sont reliées à l'exponentielle, les fonctions hyperboliques inverses sont reliées à la fonction logarithme par les relations

$$\operatorname{arcsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{B.52}$$

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \qquad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \tag{B.53}$$

Ces égalités sont aisément démontrées en vérifiant que les deux membres sont égaux en un point particulier de leur domaine de définition et qu'ils ont la même dérivée. Par exemple,

$$\operatorname{arcsh} 0 = 0 = \ln 1$$

et

$$\frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{d}{dx}\operatorname{arcsh} x$$

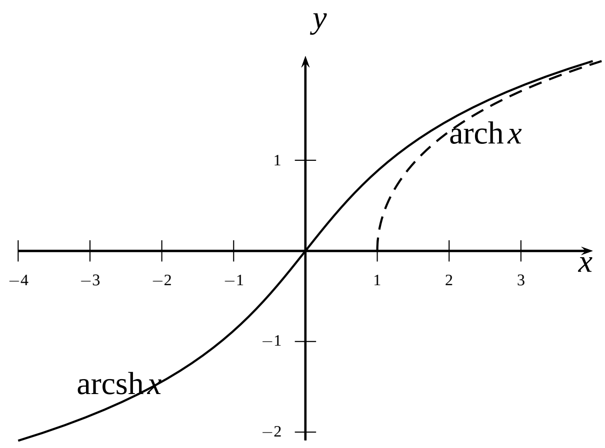

FIGURE B.8

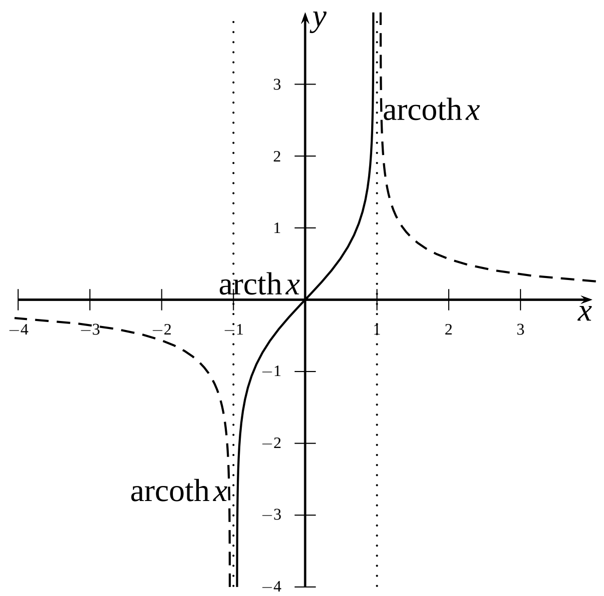

FIGURE B.9

B.4 Fonctions trigonométriques et exponentielle complexe.

Les fonctions trigonométriques usuelles sont appelées *fonctions circulaires* en raison de leur rapport avec les angles et segments du cercle trigonométrique.

Les fonctions sin et cos sont définies pour tout x par les séries

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (B.54)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (B.55)$$

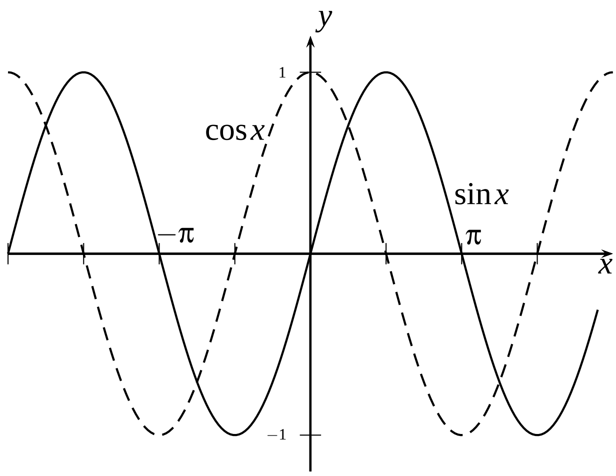

FIGURE B.10

Ces définitions sont licites [3] puisque, par application du critère du quotient aux séries des modules, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+3}(2k+1)!}{(2k+3)!|x|^{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^2}{(2k+3)(2k+2)} = 0 < 1$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}(2k)!}{(2k+2)!|x|^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+1)} = 0 < 1$$

3. Les justification des définitions introduites dans cette section et de leurs manipulations font abondamment appel aux résultats du chapitre 4 sur la convergence des séries de puissances. Le lecteur qui ne maîtrise pas les concepts correspondants abordera les développements dans leurs aspects formels uniquement.

et les séries de puissances convergent absolument et uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Elles représentent donc des fonctions indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

À partir des définitions, on obtient aisément

$$\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1 \tag{$B.56$}$$

La fonction cos est paire tandis que la fonction sin est impaire.

À partir des fonctions sin et cos, on introduit encore les définitions suivantes.

la *tangente* $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (B.57)

la *cotangente* $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (B.58)

la *sécante* $\quad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ (B.59)

la *cosécante* $\quad \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (B.60)

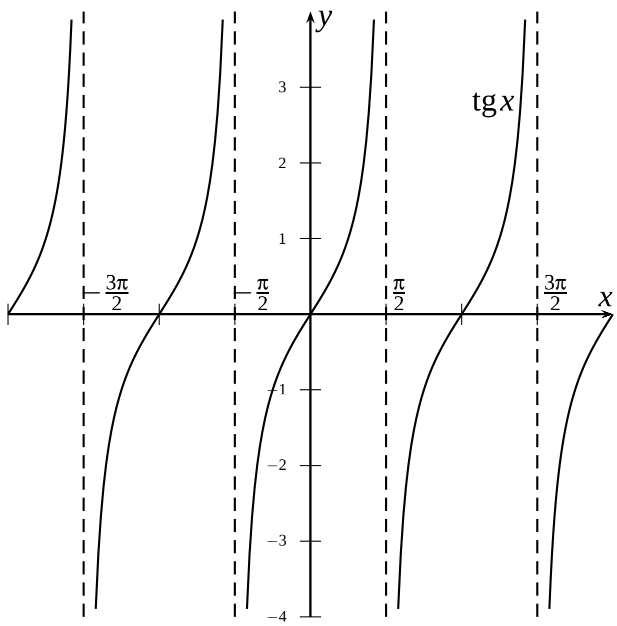

FIGURE B.11

Toute série de puissances pouvant être dérivée terme à terme dans son intervalle de convergence on a,

$$\frac{d}{dx}\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{d}{dx}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \qquad (B.61)$$

et

$$\frac{d}{dx}\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{d}{dx}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin x \qquad (B.62)$$

Ceci étant acquis, on montre aisément que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad (B.63)$$

En effet, par dérivation on a

$$\frac{d}{dx}(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\cos x(-\sin x) + 2\sin x(\cos x) = 0$$

La fonction $\cos^2 x + \sin^2 x$ est donc égale à une constante. En évaluant l'expression en $x = 0$, on prouve que cette constante est égale à 1 et on retrouve (B.63).

La relation (B.63) montre que les valeurs prises par les fonctions sin et cos appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$.

Les dérivées des fonctions tg, cotg, sec et cosec peuvent être aisément calculées par application des règles usuelles de dérivation. Par exemple,

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\end{aligned} \qquad (B.64)$$

B.4.1 Exponentielle d'un nombre complexe.

En utilisant les définitions des fonctions cos et sin, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x + i\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} \qquad (B.65)$$

(où le réarrangement des termes de la série est justifié par la convergence absolue de la série). Reconnaissant l'analogie de cette série avec le développement en série de puissances (B.18) de la fonction exp, on définit l'*exponentielle imaginaire* par

$$\exp(ix) = \mathrm{e}^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} \qquad (B.66)$$

Dès lors, on obtient les célèbres *formules d'Euler*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{B.67}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \tag{B.68}$$

En résolvant par rapport à $\sin x$ et $\cos x$, on a

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \Im[\exp(ix)] \tag{B.69}$$

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \Re[\exp(ix)] \tag{B.70}$$

La dérivée de l'exponentielle imaginaire est donnée par

$$\frac{d}{dx}\exp(ix) = \frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = i \exp(ix) \tag{B.71}$$

Plus généralement, on défint l'*exponentielle d'un nombre complexe* z par

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{B.72}$$

La loi de multiplication (B.22) est aisément étendue à l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{B.73}$$

En particulier, pour $z = x + iy$, il vient

$$\exp z = \exp(x + iy) = \exp x \exp(iy) = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{B.74}$$

et

$$\overline{\exp z} = \overline{\exp x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) = \exp \overline{z} \tag{B.75}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} |\exp z| &= \sqrt{\exp z \overline{\exp z}} \\ &= \sqrt{\exp z \exp \overline{z}} = \sqrt{\exp(z + \overline{z})} = \sqrt{\exp(2\Re z)} \\ &= \exp(\Re z) \end{aligned} \tag{B.76}$$

En particulier,

$$\overline{\exp(ix)} = \exp(-ix) \tag{B.77}$$

$$|\exp(ix)| = \exp(0) = 1 \tag{B.78}$$

B.4.2 Propriétés des fonctions trigonométriques.

Les fonctions trigonométriques satisfont aux relations

$$\sin^2 x + \cos^2 x = |\,\mathrm{e}^{ix}\,|^2 = 1 \tag{B.79}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \tag{B.80}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin y \sin x \tag{B.81}$$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,y}{1 \mp \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y} \tag{B.82}$$

Toutes ces propriétés sont aisément démontrées à partir des formules d'Euler (B.67) et (B.68). Par exemple,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \mathrm{e}^{i(x+y)} = \mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{e}^{iy}\\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\end{aligned}$$

De même, la *formule de Moivre*

$$(\cos nx + i\sin nx) = (\cos x + i\sin x)^n \qquad n \text{ entier} \tag{B.83}$$

est une conséquence directe de

$$\mathrm{e}^{inx} = \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^n \tag{B.84}$$

On définit le nombre $\dfrac{\pi}{2}$ comme étant le plus petit zéro positif de $\cos x$.

Pour que cette définition ait un sens, il faut que la fonction $\cos x$ possède au moins un zéro positif. Cette fonction étant continue sur $[0,+\infty[$ avec $\cos 0 = 1$, il suffit de démontrer que $\cos x$ prend des valeurs négatives sur $]0,+\infty[$.

Raisonnons par l'absurde et supposons

$$(1 \geq)\cos x > 0 \text{ sur }]0,+\infty[.$$

Alors $\sin x$ croît sur $]0,+\infty[$ puisque $(\sin x)' = \cos x > 0$. Cette situation est contradictoire car, en appliquant le théorème des accroissements finis, il vient

$$\cos a > \cos a - \cos x = (x-a)\sin\xi > (x-a)\sin a.$$

où $0 < a < \xi < x$ et par suite,

$$\cos a > (x-a)\sin a \to +\infty$$

si $x \to +\infty$, ce qui est absurde puisque $|\cos a| \leq 1$.

L'ensemble des zéros positifs de $\cos x$ n'est donc pas vide et admet un plus petit minorant [4].

$\square$

Le tableau suivant fournit alors la *périodicité* des fonctions circulaires

$e^{i0} = 1$	$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \quad \Rightarrow$	$e^{i\pi} = -1 \quad \Rightarrow$	$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \quad \Rightarrow$	$e^{i2\pi} = 1$
$\Downarrow$	$\Uparrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \sin 0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos \pi = -1 \\ \sin \pi = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos \dfrac{3\pi}{2} = 0 \\ \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1 \end{cases}$	$\begin{cases} \cos 2\pi = 1 \\ \sin 2\pi = 0. \end{cases}$

En conséquence, les fonctions $\sin x$, $\cos x$, e^{ix}, $\sec x$ et $\operatorname{cosec} x$ sont périodiques de période 2π. Les fonctions $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ sont également périodiques mais de période π. En effet, par application de (B.82) pour tout $x \neq (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \pi} = \operatorname{tg} x \qquad (B.85)$$

en tenant compte de $\operatorname{tg} \pi = 0$.

4. Celui-ci est nécessairement atteint et reste un zéro de $\cos x$ puisque limite d'une suite de zéros de cette fonction continue.

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y = \mathrm{cotg}\, x$
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{(k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$y \in$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
continu et dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{(k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$y'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\int y(x)dx$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
paire/impaire	impaire	paire	impaire	impaire

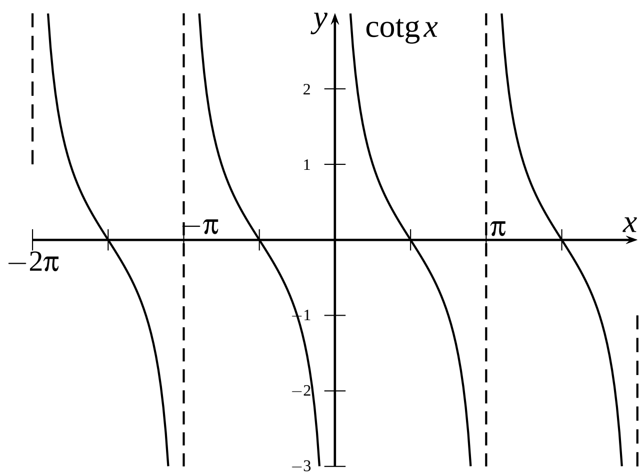

FIGURE B.12

B.4.3 Fonctions trigonométriques inverses.

Les fonctions trigonométriques inverses sont définies sur les ensembles des valeurs des fonctions directes mais prennent leurs valeurs dans un intervalle de largeur π seulement. Par le théorème des fonctions réciproques, elles sont continûment dérivables sur l'intérieur de leur intervalle de définition.

	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y = \mathrm{arcotg}\, x$
$x \in$	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y \in$	$[-\pi/2,\pi/2]$	$[0,\pi]$	$]-\pi/2,\pi/2[$	$]0,\pi[$
continu sur	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
dérivable sur	$]-1,1[$	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
paire/impaire	impaire		impaire	

Remarquons que les dérivées des fonctions arcsin et arcos sont opposées. On a en fait

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \; \forall x \in [-1,1] \tag{B.86}$$

De même,

$$\mathrm{arcotg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x \; \forall x \in \mathbb{R} \tag{B.87}$$

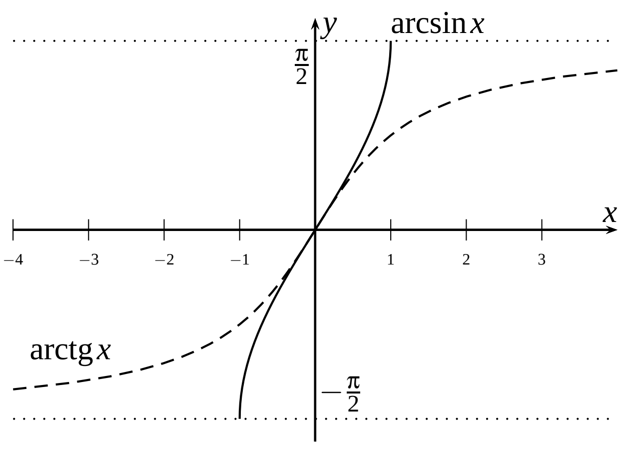

FIGURE B.13

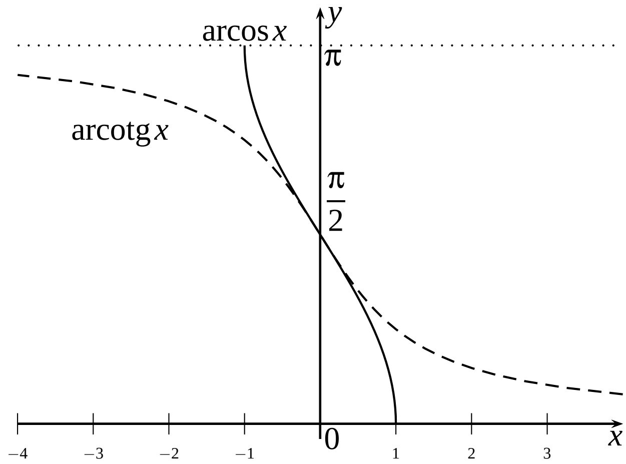

FIGURE B.14

Jusqu'ici, nous avons défini les fonctions trigonométriques d'un point de vue strictement analytique. Nous allons maintenant montrer que les définitions données sont conformes à l'interprétation géométrique habituelle qui veut que le couple $(\cos\theta, \sin\theta)$ représente les coordonnées x et y du point obtenu en portant une distance θ le long du cercle unité en partant de $(1,0)$ et en adoptant le sens anti-horlogique comme sens positif (Fig. B.15).

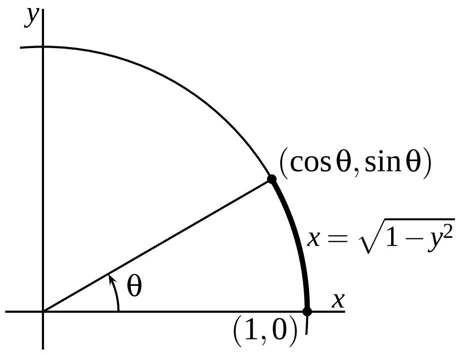

FIGURE B.15

Pour $0 < \theta < \pi/2$, on peut calculer la longueur de la portion de cercle située entre 0 et θ en considérant qu'il s'agit de la partie du graphe de la fonction $g(y) = \sqrt{1-y^2}$ situé entre $y = 0$ et $y = \sin\theta$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
\theta &= \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1+g'(y)^2}\,dy = \int_0^{\sin\theta} \sqrt{1+\left(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2}\,dy \\
&= \int_0^{\sin\theta} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\
&= \Big[\arcsin y\Big]_0^{\sin\theta} = \theta
\end{aligned}$$

La définition analytique est donc conforme à la définition géométrique classique.

B.4.4 Applications de l'exponentielle imaginaire.

L'utilisation de la forme exponentielle imaginaire simplifie également l'arithmétique dans le plan complexe. Tout nombre complexe $z = x + iy$ peut être mis sous la forme

$$z = x + iy = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \quad \text{où} \quad r = |z| \tag{B.88}$$

et

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0, \qquad \theta = \mathrm{signe}(y)\frac{\pi}{2} \quad \text{si } x = 0 \tag{B.89}$$

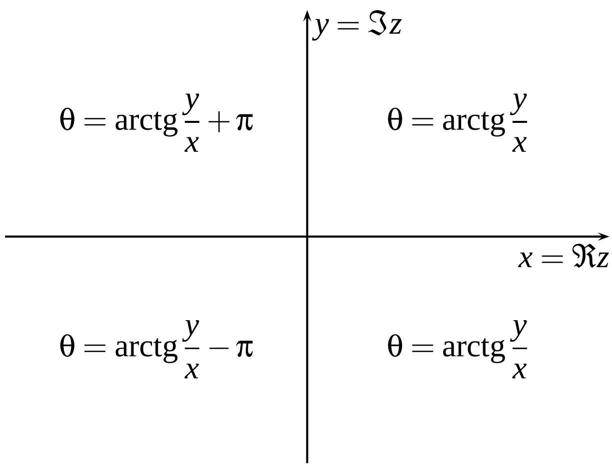

FIGURE B.16 - Argument d'un nombre complexe.

Si $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{i\theta_2}$, il vient

$$\bar{z}_1 = r_1\,\mathrm{e}^{-i\theta_1} \tag{B.90}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{B.91}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \, e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{B.92}$$

En raison de son comportememt particulier lors de sa dérivation ou de son intégration, l'exponentielle imaginaire simplifie également le calcul de certaines dérivées et intégrales.

EXEMPLE B.1

$$\frac{d}{dx} e^{(3+4i)x} = (3+4i)\, e^{(3+4i)x} = (3+4i)\, e^{3x}(\cos 4x + i \sin 4x)$$

Dès lors, en indentifiant les parties réelle et imaginaire,

$$\frac{d}{dx} e^{3x} \cos 4x = e^{3x}(3\cos 4x - 4\sin 4x)$$

et

$$\frac{d}{dx} e^{3x} \sin 4x = e^{3x}(3\sin 4x + 4\cos 4x)$$

EXEMPLE B.2 Calculons la primitive

$$\int e^{ax} \cos bx dx$$

Pour ce faire, on peut considérer l'intégrand comme étant la partie réelle de

$$e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

Or,

$$\begin{aligned} \int e^{(a+ib)x} dx &= \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + c \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(\cos bx + i \sin bx)(a - ib) + c \end{aligned}$$

Dès lors, la primitive recherchée est donnée par la partie réelle de la primitive précédente, soit

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b \sin bx) + c_1$$

En bonus, on obtient aussi

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b \cos bx) + c_2$$

Enfin, l'exponentielle imaginaire constitue une façon très élégante de représenter un signal ou un processus harmonique. L'écriture d'un signal sinusoïdal ou cosinusoïdal en fonction de l'exponentielle imaginaire permet en effet de transformer des relations différentielles ou intégrales en relations algébriques entre les amplitudes des signaux.

EXEMPLE B.3 Un circuit électrique RLC série est composé d'une résistance R, d'une self d'inductance L et d'un condensateur de capacité C placés en série (Fig. B.17).

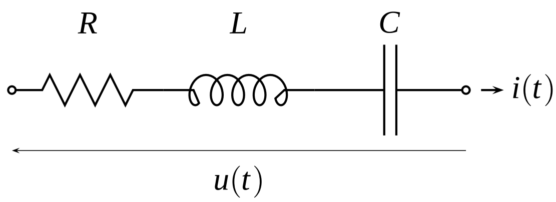

FIGURE B.17

La différence de potentiel aux bornes du circuit est donnée par la somme des différences de potentiel aux bornes des différents éléments, soit

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Lorsque ce circuit est parcouru par un courant alternatif $i(t) = I\cos\omega t$, $u(t)$ est donné par

$$u(t) = RI\cos\omega t - IL\omega\sin\omega t + \frac{I}{\omega C}\sin\omega t$$

et est donc également alternative avec la même pulsation.

On peut simplifier le calcul et la représentation de $u(t)$ en exprimant le courant électrique sous la forme [5]

$$i(t) = \Re I\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} u(t) &= \Re\left\{RI\,\mathrm{e}^{j\omega t} + j\omega LI\,\mathrm{e}^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}I\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \\ &= \Re\left\{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)I\,\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \end{aligned}$$

La différence de potentiel est donc également de la forme

$$u(t) = \Re U\,\mathrm{e}^{j\omega t}$$

où U est l'amplitude complexe de la différence de potentiel, avec

$$U = ZI$$

où

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

5. Afin d'éviter la confusion avec le courant électrique $i(t)$, l'unité imaginaire est généralement notée j dans le contexte de l'électricité.

est appelée l'*impédance complexe* du système. Ainsi donc, on a pu transformer la dépendance analytique complexe entre $u(t)$ et $i(t)$ par une relation algébrique entre les amplitudes complexes U et I qui est l'analogue de la loi d'Ohm dans le cas de signaux alternatifs.

Si on écrit Z en fonction de l'exponentielle imaginaire,

$$Z = |Z|\,e^{j\varphi} \qquad \text{où} \qquad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \text{ et } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

il vient

$$u(t) = I|Z|\cos(\omega t + \varphi)$$

φ est le déphasage entre le courant et la tension. L'amplitude des variations de la tension dépend du module de Z et donc de la pulsation ω ($= 2\pi/T$ où T est la période et $1/T$ la fréquence) à laquelle on travaille. La valeur minimale de Z intervient lorsque $\omega L = 1/\omega C$, soit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ceci signifie que le circuit à tendance à laisser passer les courants électriques dont la fréquence est voisine de $\omega_0/2\pi$ mais s'oppose au passage des courants électriques de plus haute ou de plus basse fréquence.

B.5 Rapport entre les fonctions circulaires et hyperboliques.

En comparant les définitions des fonctions circulaires et hyperboliques, on peut définir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x \qquad (B.93)$$

De même

$$\sin ix = \frac{e^{-x} - e^x}{2i} = i \operatorname{sh} x \qquad (B.94)$$

Inversement,

$$\operatorname{ch} ix = \cos x \qquad \text{(B.95)}$$

$$\operatorname{sh} ix = i \sin x \qquad \text{(B.96)}$$

Ces relations permettent de passer aisément d'une famille de fonctions à l'autre afin, par exemple, de travailler toujours avec des arguments réels de ces fonctions.