Si toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ apparaissant dans la différentielle

$$df(\mathsf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathsf{x})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathsf{x})dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathsf{x})dx_n \tag{3.90}$$

sont des fonctions d'une même variable $t$, alors on peut écrire

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \tag{3.91}$$

Cette relation, obtenue formellement "en divisant par $dt$", résulte de la règle de dérivation des fonctions composées. On a, en effet,

$$\frac{d}{dt}f[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

L'approximation linéaire des variations d'une fonction fournie par sa différentielle est souvent utilisée pour expliciter la sensibilité d'une grandeur aux variations des paramètres dont elle dépend et pour estimer l'influence des incertitudes des valeurs de ces paramètres.

**Exemple 3.29** Calcul d'erreur.

Si on place trois résistances électriques $r_1, r_2, r_3$ en parallèle, la résistance totale $R$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

On peut donc considérer $R = R(r_1, r_2, r_3)$.

Si les valeurs des trois résistances ne sont connues qu'avec des incertitudes $\Delta r_1, \Delta r_2$ et $\Delta r_3$, la différentiabilité de $R$ permet d'exprimer l'incertitude sur la résistance totale sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta R &= R(r_1 + \Delta r_1, r_2 + \Delta r_2, r_3 + \Delta r_3) - R(r_1, r_2, r_3) \\ &= \frac{\partial R}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial R}{\partial r_2}\Delta r_2 + \frac{\partial R}{\partial r_3}\Delta r_3 + o(\|\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3\|) \end{aligned}$$

où les dérivées sont évaluées en $(r_1, r_2, r_3)$. Tenant compte de

$$\frac{\partial R}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^{-1} = \frac{R^2}{r_i^2}$$

il vient

$$\Delta R \sim R^2\left(\frac{\Delta r_1}{r_1^2} + \frac{\Delta r_2}{r_2^2} + \frac{\Delta r_3}{r_3^2}\right)$$

de sorte que l'incertitude relative sur la résistance totale est telle que

$$\frac{\Delta R}{R} \sim \frac{R}{r_1}\frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{R}{r_2}\frac{\Delta r_2}{r_2} + \frac{R}{r_3}\frac{\Delta r_3}{r_3}$$

Dès lors, si les résistances sont connues avec une erreur relative maximale $\varepsilon$, *i.e.* si

$$\left|\frac{\Delta r_1}{r_1}\right|, \quad \left|\frac{\Delta r_2}{r_2}\right|, \quad \left|\frac{\Delta r_3}{r_3}\right| \leq \varepsilon$$

l'erreur relative sur la résistance totale $R$ peut être majorée de façon approchée (en ignorant les termes négligeables par rapport à $\Delta r_1$, $\Delta r_2$, et $\Delta r_3$) par

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta R}{R}\right| &\leq \frac{R}{r_1}\left|\frac{\Delta r_1}{r_1}\right| + \frac{R}{r_2}\left|\frac{\Delta r_2}{r_2}\right| + \frac{R}{r_3}\left|\frac{\Delta r_3}{r_3}\right| \\ &\leq \varepsilon R\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

La résistance totale est donc affectée de la même erreur relative que les résistances individuelles.