où la dernière expression peut être rendue arbitrairement petite en choisissant n suffisamment grand.

Le reste peut donc être rendu arbitrairement petit à condition d'inclure un nombre suffisamment grand de termes dans le développement. La fonction peut alors être représentée par la *série de puissances*[16]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \tag{1.171}$$

Une telle expression de f est encore possible chaque fois que (1.170) est vérifiée.

Précisons néanmoins que la formule de Taylor prévoit seulement l'existence d'un point ξ permettant de représenter l'erreur commise par l'approximation polynomiale de f au point x. Sans hypothèse supplémentaire, elle ne permet pas d'affirmer que cette erreur diminue lorsque l'on ajoute des termes supplémentaires au développement.

Le cas particulier où $a = 0$ se rencontre très fréquemment en pratique. La formule de Taylor porte alors le nom de *formule de MacLaurin*.

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots \\ \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (\theta \in]0,1[) \end{aligned} \tag{1.172}$$

Remarquons que le développement de MacLaurin d'une fonction paire ne peut comporter que des puissances paires de x tandis que celui d'une fonction impaire ne présente que des puissances impaires de x. Ceci provient du fait que la dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire. Or une fonction impaire est nécessairement nulle à l'origine.

EXEMPLE 1.66 Considérons les fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ au voisinage de $x = 0$. Ces fonctions sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Les dérivées successives de $\sin x$ et $\cos x$ sont bornées par 1 indépendamment de n de sorte que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

16. Les expressions de ce type seront étudiées en détail à la section 4.7.

En pratique, on peut tronquer ce développement et n'en utiliser que les quelques premiers termes si on désire utiliser ces développements limités au voisinage de $x = 0$. En effet, si on retient seulement $n+1$ termes

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} f^{(2n+3)}(\theta_1 x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta_2 x)$$

où θ_1 et $\theta_2 \in]0,1[$, les erreurs sont bornées selon

$$\left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} f^{(2n+3)}(\theta_1 x) \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

et

$$\left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\theta_2 x) \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Si on désire évaluer $\sin(\pi/6)$ et $\cos(\pi/6)$, par le développement limité de MacLaurin, on obtient

Nombre de termes	1	2	3	4
$\sin(\pi/6)$	0.523599	0.499674	0.500002	0.5
Borne de l'erreur	0.024	0.00033	$2.1\,10^{-6}$	$8.2\,10^{-9}$
$\cos(\pi/6)$	1.	0.862922	0.866054	0.866025
Borne de l'erreur	0.14	0.0031	0.000029	$1.4\,10^{-7}$

En pratique, si x est petit, on approchera souvent les fonctions $\sin$ et $\cos$ par leurs développements limités en exploitant

$$\sin x \sim x, \quad (x \to 0)$$

et

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (x \to 0) \qquad \text{ou même} \qquad \cos x \sim 1, \quad (x \to 0)$$

Si x n'est pas petit, on peut obtenir une précision supérieure en ajoutant des termes supplémentaires au développement ou en développant la fonction en série de Taylor autour d'un autre point.

EXEMPLE 1.67 Développons la fonction $g(x) = \cos x$ au voisinage de $x = \pi/3$. Les dérivées successives sont données par

$$g^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

de sorte que

$$g(\pi/3) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad g'(\pi/3) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g''(\pi/3) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad g'''(\pi/3) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$