17) Déterminez les dimensions de la boîte parallélépipèdique de volume maximum qui peut être logée dans l'espace

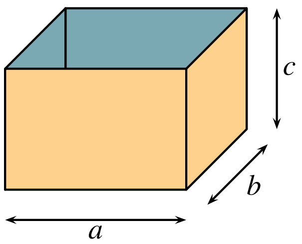
$$\mathrm{K} = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\}$$

(où a, b et c sont des constantes strictement positives) sachant qu'un des sommets est placé à l'origine et que les trois arêtes adjacentes à ce sommet sont disposées sur les axes de coordonnées.

Que vaut le volume maximum ?

Rép. : $V = abc/27$

*18) On désire construire un conteneur parallélépipédique pour un volume V de gravier stocké à même le sol. Le conteneur ne comporte ni fond ni couvercle et est donc constitué de quatre panneaux verticaux rectangulaires. Les dimensions du conteneur sont notées a, b et c.



Déterminez les dimensions du conteneur présentant la surface latérale minimale sachant que, pour en permettre la fabrication, chacune des dimensions a, b et c doit être supérieure ou égale à ℓ (où ℓ est une constante strictement positive). On supposera que $V > \ell^3$.

Rép. : $(a,b,c) = (\sqrt{V/\ell}, \sqrt{V/\ell}, \ell)$

19) Déterminez la distance entre la parabole $y = x^2 + x + 1$ et la droite $y = x - 1$.

Rép. : $\sqrt{2}$

20) Déterminez la solution de norme minimale du système d'équations

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Rép. : $(x,y,z) = (5/3, 1/3, -4/3)$

21) Une entreprise développe trois nouveaux produits dont elle estime que la vente sur le marché peut générer un bénéfice de, respectivement, 10%, 10% et 15% de l'investissement consenti pour la R&D et l'équipement de la chaîne de production correspondante.

Il existe cependant un risque que les produits ne correspondent pas vraiment au marché. Si on note x, y et z les fractions des montants investis dans les trois produits, le risque (variance du bénéfice) peut être exprimé sous la forme

$$r(x,y,z) = 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$$

Sachant que les bailleurs de fonds de l'entreprise veulent s'assurer un bénéfice global de 12%, déterminez les fractions x, y et z permettant d'atteindre cet objectif de rentabilité en minimisant le risque.

Rép. : $(x,y,z) = (0.5, 0.1, 0.4)$

22) On considère la fonction

$$f(x,y,z) = z + z^2$$

et l'ensemble

$$\mathrm{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = c,\ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

où c désigne une constante.

a) Décrivez qualitativement et esquissez $\mathtt{E}$ dans le cas où $c = 0$.

b) Déterminez la position et la valeur du minimum et du maximum absolus de f sur $\mathtt{E}$ dans le cas où $c = 0$.

Rép. : Max $= (\sqrt{2}+1)/2$ en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, min $= -1/4$ en $(0,1,-1/2)$ et $(1,0,-1/2)$

c) On note $M(c)$ la valeur du maximum absolu de f sur $\mathtt{E}$. Que vaut $M'(0)$?

Rép. : $(\sqrt{2}+1)/2$

3.14.7 Changements de variables

1) Si on pose

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^u \cos t \\ y = \mathrm{e}^u \sin t \end{cases},$$

montrez que

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = (x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

2) Utilisez le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x \end{cases}$$

pour résoudre l'équation ($c \neq 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Rép. : $\varphi(x,t) = f(x+ct)$

3) Utilisez le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

pour résoudre l'équation d'onde ($c \neq 0$)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Rép. : $\psi(x,t) = f_1(x+ct) + f_2(x-ct)$

*4) Transformez l'équation aux dérivées partielles ($c \neq 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

en utilisant les coordonnées sphériques (r,φ,ϕ) à la place des coordonnées cartésiennes (x,y,z).
Si f est une fonction d'une variable deux fois continûment dérivable, montrez que

$$u(r,\varphi,\phi,t) = \frac{f(r-ct)}{r}$$

est une solution du problème.