6) Calculez la longueur totale de la ligne brisée obtenue en reliant par des segments de droites la suite infinie des points $P_0, P_1, P_2, \ldots$ de coordonnées

$$P_k \ : \ \left(2^{-k}\cos\frac{k\pi}{4}, 2^{-k}\sin\frac{k\pi}{4}\right), \qquad k \in \{0,1,2,\ldots\}$$

Rép. : $\sqrt{\dfrac{1+(2\sqrt{2}-1)^2}{2}}$

*7) Dans un modèle de cristal très simple, des ions sont disposés sur un réseau infini, unidimensionnel et régulier avec un espacement R. Les ions successifs portent des charges égales et opposées $\pm e$. L'énergie potentielle du i-ème ion due à la présence du j-ème ion est

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

où q_i et q_j sont les charges électriques des deux ions et r_{ij} leur distance.
Écrivez sous forme d'une série l'énergie potentielle totale V_i du i-ème ion. Montrez que la série converge et, si V_i est écrit

$$V_i = \frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

trouvez l'expression de α, la constante de Madelung.

Rép. : $\alpha = -2\ln 2$

8) Étudiez la convergence des séries suivantes en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{\ln k}}{k^\beta}$,

Rép. : absolument convergente pour $\beta > 1$,
semi-convergente pour $\beta \in]0,1]$,
divergente pour $\beta \leq 0$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)^\beta}$.

Rép. : absolument convergente pour $\beta > 2$,
semi-convergente pour $\beta \in]0,2]$,
divergente pour $\beta \leq 0$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos k\pi}{\beta^k}$ où $\beta \neq 0$.

Rép. : absolument convergente pour $|\beta| > 1$,
divergente pour $\beta \in [-1,0[\cup]0,+1]$.

4.10.2 Séries de fonctions.

1) Étudiez la convergence des séries de fonctions suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$, Rép. : Conv. absolue sur $-1 < x < 1$, semi-conv. en $x = -1$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sin x)^k$, Rép. : Conv. absolue sur $\forall x \in \mathbb{R}$ sauf $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$