6) On se propose d'évaluer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \ln(1+\mathrm{e}^x)dx$$

en approchant l'intégrande par la formule de MacLaurin.

a) Appliquez la formule de MacLaurin à l'ordre deux à la fonction $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ et déterminez ainsi une approximation polynomiale $\mathcal{P}_2(x)$ de cette fonction ainsi que l'expression du reste $\mathcal{R}_2(x)$ correspondant. Pour quelles valeurs de x ces résultats sont-ils valables ?

Rép. : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{P}_2(x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$ et $\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{6}\frac{\mathrm{e}^{\xi}(1-\mathrm{e}^{\xi})}{(1+\mathrm{e}^{\xi})^3}$ où $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$)

b) Montrez que, pour tout $x \in [0,1]$, le reste $\mathcal{R}_2(x)$ est, en valeur absolue, inférieur à 0.1.

c) En exploitant les résultats précédents, déterminez une valeur approchée $\tilde{I}$ de I.

Rép. : $\ln 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \approx 0.985$

d) Déterminez une borne de l'erreur associée à $\tilde{I}$.

Rép. : $\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)}{48} \approx 0.097$

7) Pour chacune des fonctions suivantes, montrez que l'intégration du polynôme de Taylor du second ordre construit autour de $a = 0$ fournit un polynôme de Taylor d'une primitive de cette fonction :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

8) Le mouvement d'un point matériel sur un pendule rotatif est décrit par la fonction potentielle

$$\mathcal{V}(\theta) = -\frac{n^2}{2}\sin^2\theta - \cos\theta \qquad \theta \in [-\pi,\pi]$$

Les positions d'équilibre du système correspondent aux points stationnaires de $\mathcal{V}$ (minimum = équilibre stable, maximum ou point d'inflexion = équilibre instable). Déterminez les positions d'équilibre du système et leur stabilité.

Rép. : $n^2 \leq 1$: équilibre stable $\theta = 0$ et instable en $\theta = \pm\pi$
$n^2 > 1$: équilibre instable en $\theta = 0$ et $\pm\pi$
et équilibre stable en $\pm \arccos n^{-2}$

*9) Déterminez les valeurs de x^2 pour que la fonction

$$f(s) = s^2 - \frac{x^2}{4}\left(\arcsin s + s\sqrt{1-s^2}\right)^2$$

présente un minimum relatif en $s = 0$. Rép. : $x^2 \leq 1$