62) $x^3y'' - x^2y' - 3xy + 16\ \ln x = 0$,

*Suggestion : Posez* $x = \mathrm{e}^t$

Rép. : $y = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x} + \dfrac{\ln x}{x} + 2\dfrac{\ln^2 x}{x}$

63) $xyy' = -2x^2 + y^2 + x$,

Rép. : $\dfrac{y^2}{2x^2} + \dfrac{1}{x} + 2\ln|x| = C$

64) $y''' - 12y' + 16y = 32x - 8$,

Rép. : $y = (C_1 + C_2x)\,\mathrm{e}^{2x} + C_3\,\mathrm{e}^{-4x} + 2x + 1$

65) $x^2y'' - xy' + y = x; \quad y(1) = 1, \quad y(\mathrm{e}) = 2\mathrm{e}$,

*Suggestion : Posez* $x = \mathrm{e}^t$

Rép. : $y(x) = x + \dfrac{1}{2}(x\ln x(1 + \ln x))$

66) $y' + \dfrac{xy}{a^2 + x^2} = x$,

Rép. : $y = \dfrac{a^2 + x^2}{3} + \dfrac{C}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

67) $y' = \dfrac{4y^2}{x^2} - y^2$,

Rép. : $y = 0$ ou $y = \dfrac{x}{x^2 + Cx + 4}$

68) $\sin x\, y' + 2\cos x\, y = 1; \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$.

Rép. : $y = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

69) On étudie le mouvement d'une goutte d'eau de masse $m$ chutant verticalement dans le champ de la pesanteur. Sa hauteur est représentée par la fonction $z(t)$ où $t$ désigne le temps. À l'instant initial, la goutte est à une hauteur $z(0) = H$ avec une vitesse nulle, *i.e.*

$$\frac{dz}{dt}(0) = 0$$

Déterminez la hauteur $z(t)$ de la goutte d'eau en fonction du temps si on néglige le frottement de l'air exercé sur la goutte sachant que $z(t)$ vérifie alors l'équation

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg$$

Rép. : $z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + H$

70) Déterminez la solution $y(x)$ du problème différentiel

$$\begin{cases} y' + y^2 = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Rép. : $y(x) = \mathrm{th}(x - 1)$

71) Un circuit électrique est constitué de la mise en série d'une résistance $R$, d'un condensateur $C$ et d'une force électromotrice variable $V(t)$. La charge $q$ du condensateur obéit dès lors à l'équation

$$R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V(t)$$

Déterminez la charge $q(t)$ si $V(t) = V_0 \sin\omega t$ et si $q(0) = 0$.

Rép. : $q(t) = \dfrac{C\,V_0}{1 + \omega^2R^2C^2}\,(\sin\omega t + RC\omega[\exp(-t/RC) - \cos\omega t])$