9) Calculez la longueur de l'arc de la cubique gauche d'équation cartésienne

$$y = \frac{x^2}{2a}, \quad z = \frac{x^3}{6a^2}, \quad x \in]0, x_\star[.$$

Rép. : $x_\star + \frac{x_\star^3}{6a^2}$.

10) Calculez la longueur des arcs réguliers suivants

a) $P(u) = (a\mathrm{e}^u \cos u, a\mathrm{e}^u \sin u, a\mathrm{e}^u),\ u \in]-\infty, 0[,$

Rép. : $\sqrt{3}\,a$

b) $y = \sqrt{ax},\ x \in]0, a[,$

Rép. : $\frac{a}{4}\ln(2+\sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5}\,a}{2}$

c) $P(u) = (R\mathrm{e}^{-u}(\sin u + \cos u), R\mathrm{e}^{-u}(\sin u - \cos u)),\ u \in]0, +\infty[.$

Rép. : $2R$

d) $y = \frac{x^3}{a^2}, z = \frac{9x^5}{10\,a^4},\ x \in]0, x_\star[,$

Rép. : $x_\star + \frac{9x_\star^5}{10a^4}$

e) $P(u) = (R\mathrm{e}^{-u}\cos u, R\mathrm{e}^{-u}\sin u),\ u \in]0, +\infty[,$

Rép. : $\sqrt{2}\,R$

f) $P(u) = (R\sin u, R + R\cos u),\ u \in]-\pi/2, \pi/2[,$

Rép. : πR

11) Calculez la longueur totale de la courbe $r = a\sin^3\frac{\theta}{3}$ (on décrit toute la courbe en faisant varier θ de 0 à 3π.)

Rép. : $\frac{3\pi}{2}a$

12) On considère la chaînette d'équation $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

a) Calculez la longueur de la courbe entre le sommet $A(0, a)$ et le point $B(b, h)$.

Rép. : $\sqrt{h^2 - a^2}$

b) Déterminez le rayon de courbure en fonction de x.

Rép. : $\rho = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}$

c) Déterminez l'abscisse curviligne d'origine A.

Rép. : $s(x) = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$

13) Calculez la longueur de la courbe $y = a\mathrm{e}^{x/a}$ comprise entre les points $(0, a)$ et $(a, a\mathrm{e})$.

Rép. : $\left[\sqrt{1+\mathrm{e}^2} - \sqrt{2} + \ln\frac{(\sqrt{1+\mathrm{e}^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\mathrm{e}}\right]a$

14) Calculez la longueur de la courbe tracée sur la demi-sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z > 0)$ et qui se projette sur le plan $z = 0$ suivant la spirale $r = \frac{a}{\mathrm{ch}\,\theta},\ \theta \in]0, +\infty[.$

Rép. : $\frac{\pi}{2}a\sqrt{2}$