Prof. Éric J.M.DELHEZ

Équations différentielles linéaires.

Il est utile de revoir les **paragraphes 2.3 et 2.4** du cours d'Analyse avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. Les fonctions e^x et $\operatorname{th} x$ sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

ii. Soit le problème différentiel

$$y''' + f(x)y' + y = e^{-x} \quad \text{avec} \quad y''(0) = y(0) = 3 \quad \text{et} \quad f(x) \in C_1(\mathbb{R})$$

Déterminez si une solution existe et, dans l'affirmative, si celle-ci est unique sur $[-1, 1]$.

iii. Le séismographe est un dispositif mécanique permettant de détecter les mouvements de la croûte terrestre associés à un tremblement de terre. Les séismographes reposent pour la plupart sur la mesure du mouvement d'une masse m par rapport à un support qui, étant fixé au sol, subit directement l'effet du tremblement de terre. Des dispositifs de rappel et d'amortissement sont également intégrés à l'appareil de sorte que le mouvement $x(t)$ de la masse m par rapport au support vérifie l'équation

$$m\Big[\ddot{x} + a(t)\Big] + c\dot{x} + kx = 0 \qquad \text{où} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \;\; \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

où k et c sont des constantes strictement positives et où $a(t) = A\cos\omega t$ désigne l'accélération du sol (supposée harmonique d'amplitude A et de pulsation ω constantes). On considère le cas particulier où, dans le système international d'unités, $m = 2$, $c = 2$, $k = 1$ et $\omega = 1$.

(a) Déterminez la réponse $x(t)$ du séismographe initialement au repos ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$).

(b) Montrez que la réponse du séismographe établie ci-dessus est telle que

$$x(t) \sim X\cos(\omega t - \phi), \qquad (t \to +\infty)$$

Déterminez les valeurs des constantes X et ϕ et montrez ainsi comment la mesure de l'amplitude de la réponse X du séismographe permet d'obtenir l'amplitude A de l'accélération du sol.

iv. On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminez le plus grand intervalle $\mathtt{I}$ contenant l'origine sur lequel le problème différentiel admet au moins une solution deux fois continûment dérivable. Justifiez.

(b) Déterminez toutes les fonctions y vérifiant le problème différentiel sur $\mathtt{I}$.

(c) Montrez que la condition auxiliaire supplémentaire

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$$

ne permet pas d'obtenir une solution unique sur $\mathtt{I}$.

v. L'équation différentielle gouvernant le déplacement $x(t)$ d'un oscillateur harmonique soumis à une excitation périodique s'écrit

$$m\ddot{x} = -kx + mF\cos\omega_0 t$$

où m, k et F sont des constantes réelles strictement positives et où $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

On demande de déterminer la loi du mouvement $x(t)$ de cet oscillateur si, à l'instant initial, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Remédiation 3 d'Analyse - Réponses succinctes aux questions posées.

i. Oui.

ii. La solution du problème existe mais n'est pas unique sur $[-1,1]$.

iii. (a)

$$x(t) = \frac{2}{5}A\,\mathrm{e}^{-t/2}\left(-\cos\frac{t}{2} + 3\sin\frac{t}{2}\right) + \frac{2}{5}A\cos t - \frac{4}{5}A\sin t$$

(b)

$$X\cos\phi = \frac{2}{5}A \quad \text{et} \quad \phi = -\operatorname{arctg} 2$$

$$A = \frac{\sqrt{5}}{2}X$$

iv. (a) $\mathtt{I} =]-1, +\infty[$

(b)

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big[(1+x)\ln(1+x) + Ax\Big] \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

(c) -

v.

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{Ft}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$