Prof. Éric J.M.DELHEZ



## Équations différentielles non linéaires.

Il est utile de revoir les **paragraphes 2.1, 2.2 et 2.5** du cours d'Analyse avant d'aborder ces questions.

Les réponses succinctes aux questions se trouvent sur une page à la suite des énoncés. Une solution complète doit évidemment comporter les détails des calculs et des justifications.

i. On considère la croissance d'une population dans un milieu dont les ressources sont limitées. La dynamique de cette population est décrite par la loi

$$\frac{dP}{dt} = \mu P - mP^n$$

où $P(t)$ désigne la taille de la population, $t$ est le temps, $\mu > 0$ désigne le taux de croissance nominal et où $m$ et $n$ sont des constantes caractérisant la mortalité de la population.

Déterminez l'évolution de la population à partir de sa valeur initiale $P_0 = P(0)$ et esquissez le comportement de la solution dans les cas suivants en discutant s'il y a lieu en fonction des paramètres.

(a) On ignore toute mortalité, *i.e.* $m = 0$.

(b) La mortalité est représentée par une cubique, *i.e.* $n = 3$ et $m > 0$.

ii. On considère une réaction chimique du type $2A \to B$ dont la cinétique est décrite par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2kx^2 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = kx^2 \end{cases}$$

où $x(t) = [A]$ et $y(t) = [B]$ sont respectivement les concentrations des réactifs et des produits et où $k$ désigne une constante strictement positive. À l'instant initial, la concentration de $A$ est donnée par $[A]_0$ et la concentration de $B$ est nulle.

(a) Déterminez l'évolution temporelle des concentrations des réactifs et des produits.

(b) Calculez la constante de demi-réaction $t_{1/2}$, *i.e.* le temps au bout duquel la moitié des réactifs a été consommée.

iii. La forme prise par un câble pesant attaché à ses deux extrémités est donnée par

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

où $\rho$ et $T$ sont deux constantes correspondant respectivement à la masse par unité de longueur et à la tension horizontale.

Déterminez $y(x)$ si $y(a) = y(-a) = 0$.

iv. Déterminez la solution générale de $y^2 - 3x^2 + 2xyy' = 0$ en posant $u = y/x$.

**Remédiation 2 d'Analyse - Réponses succinctes aux questions posées.**

i. (a)

$$P = P_0 \, \mathrm{e}^{\mu t}$$

(b)

$$P = P_0 \sqrt{\frac{\mu}{(\mu - mP_0^2)\,\mathrm{e}^{-2\mu t} + mP_0^2}}$$

ii. (a)

$$x(t) = \frac{[A]_0}{1 + 2k[A]_0 t} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{k[A]_0^2 t}{1 + 2k[A]_0 t}$$

(b)

$$t_{1/2} = \frac{1}{2k[A]_0}$$

iii.

$$y(x) = \frac{T}{\rho}\left(\operatorname{ch}\frac{\rho x}{T} - \operatorname{ch}\frac{\rho a}{T}\right)$$

iv.

$$x(y^2 - x^2) = C$$