Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2017

ANALYSE MATHÉMATIQUE
ÉVALUATION FORMATIVE

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures et demie.

- *Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du **7 novembre**.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $x^2+xy+2y^3=4$ au point $(x,y)=(-2,1)$.

Question II

Si $h=o(f)$, $(x\to x_0)$ et $g=O(h)$, $(x\to x_0)$, montrez que

$$g=o(f),\ (x\to x_0),\quad i.e.\quad O(o(f))=o(f),\ (x\to x_0)$$

Question III

i. Déterminez le plus grand intervalle $\mathtt{I}$ contenant l'origine sur lequel $f(x)=\sqrt{1+x}$ vérifie les hypothèses de la formule de MacLaurin à l'ordre deux. Justifiez en énonçant explicitement les hypothèses du théorème.

ii. Exploitez la formule de MacLaurin pour exprimer $f(x)=\sqrt{1+x}$ sur $\mathtt{I}$ sous la forme

$$f(x)=\mathcal{P}_2(x)+\mathcal{R}_2(x)$$

où $\mathcal{P}_2(x)$ est un polynôme de degré 2 en x et où $\mathcal{R}_2(x)$ est le terme d'erreur correspondant.

iii. Utilisant le résultat précédent, déterminez une valeur approchée de $\cos(\pi/6)$ exprimée sous la forme d'un nombre rationnel et entachée d'un erreur maximale de 0.01. Justifiez.

iv. Justifiez le fait que

$$\sqrt{1+x}=\mathcal{P}_2(x)+O(x^3),\qquad (x\to 0)$$

v. Du point précédent, déduisez la forme d'une fonction g telle que

$$\sqrt{y^2+y}=g(y)+O\left(\frac{1}{y^2}\right),\qquad (y\to+\infty)$$

SOLUTION TYPE

Question I

L'équation $x^2+xy+2y^3=4$ définit implicitement une fonction $y(x)$ dont le graphique passe par le point $(x,y)=(-2,1)$ puisque

Le point $(-2,1)$ appartient à la courbe : 1 pt

$$x^2+xy+2y^3\Big|_{(x,y)=(-2,1)}=(-2)^2+(-2)\cdot 1+2\cdot 1^3=4$$

La pente de la tangente en ce point peut être obtenue en dérivant les deux membres de l'équation considérée où y est considéré comme une fonction de x. Il vient successivement

Dérivation implicite : 3 pts

$$\frac{d}{dx}\left[x^2+xy(x)+2y^3(x)\right]=\frac{d}{dx}4$$
$$2x+y(x)+xy'(x)+6y^2(x)\,y'(x)=0$$
$$y'(x)=-\frac{2x+y(x)}{x+6y^2(x)}$$

Considérant cette expression en $(x,y)=(-2,1)$, on obtient

Détermination de la pente : 1 pt

$$y'(-2)=-\frac{-4+1}{-2+6}=\frac{3}{4}$$

La tangente à la courbe définie par l'équation considérée au point $(x,y)=(-2,1)$ est la droite passant par ce point et de pente égale à $3/4$. On a donc

Détermination du terme indépendant : 1 pt

$$y=1+\frac{3}{4}(x+2)$$

soit

$$y=\frac{3}{4}\,x+\frac{5}{2}$$

TOTAL QI : 6 PTS

Question II

Dans les cas où les comportements asymptotiques

$$h=o(f),(x\to x_0)\quad \text{et}\quad g=O(h),(x\to x_0)$$

résultent respectivement des limites

Traduction des hypothèses en terme de limites : 2 pts

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=0\quad \text{et}\quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}=M$$

on a

Démonstration : 2 pts

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=M.0=0$$

de sorte que

Conclusion : 1 pt

$$g=o(f),(x\to x_0)$$

TOTAL QII EN CAS DE DÉMONSTRATION PAR LES LIMITES : 5 PTS (SUR 6)

Plus généralement, si f ou h s'annule dans tout voisinage de x_0, il faut recourir aux définitions de base. Par définition de $h = o(f), (x \to x_0)$, on a

Traduction des hypothèses au moyen des définitions : 2 pts

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_\varepsilon(x_0))(\forall x \in V_\varepsilon(x_0)) : |h(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$$

et par définition de $g = O(h), (x \to x_0)$, on a

$$(\exists C \,\mathrm{et}\, V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |g(x)| \leq C|h(x)|$$

En posant $\delta = C\varepsilon$ et $V_\delta(x_0) = V_\varepsilon(x_0) \cap V(x_0)$, on déduit de ces deux définitions

Démonstration : 3 pts

$$(\forall \delta > 0)(\exists V_\delta(x_0))(\forall x \in V_\delta(x_0)) : |g(x)| \leq \delta |f(x)|$$

c'est-à-dire

Conclusion : 1 pt

$$g = o(f), (x \to x_0)$$

TOTAL QII EN CAS DE DÉMONSTRATION GÉNÉRALE : 6 PTS

Question III

i. La formule de MacLaurin peut être appliquée à l'ordre deux à toute fonction réelle appartenant à $C_2([0,x])$ (ou $C_2([x,0])$ si $x < 0$) et trois fois dérivable sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$).
   La fonction $f(x) = \sqrt{1+x}$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]-1,+\infty[$, on peut lui appliquer la formule de MacLaurin à l'ordre 3 pour exprimer $f(x)$ en tout point de cet intervalle.

   Hypothèses générales de Taylor/MacLaurin : 2 pts
   Identification de $\mathtt{I}$ *: 1 pt*
   Total i. : 3 pts

ii. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, la formule de MacLaurin d'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \frac{x^3}{3!}\, f^{(3)}(\theta x) \quad \text{où} \quad \theta \in]0,1[$$

   Expression théorique de $\mathcal{P}_2$ (écrite explicitement ou utilisée en pratique) : 1 pt
   Expression théorique de $\mathcal{R}_2$ (écrite explicitement ou utilisée en pratique) : 1 pt

   Le calcul des dérivées successives de f conduit à

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, & f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, & f''(0) &= -\frac{1}{4} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

   Valeurs des dérivées : 2 pts

   Dès lors,

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

   où

   Expression de $\mathcal{P}_2$: 1 pt

$$\mathcal{P}_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

   et

$$\mathcal{R}_2(x) = \left(\frac{3}{8}\right)\frac{x^3}{3!}\,\frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{16}\frac{x^3}{(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}} \qquad \text{où} \qquad \theta \in]0,1[$$

   Expression de $\mathcal{R}_2$: 2 pts (dont 1 pt pour $\theta \in]0,1[$ ou pour $\xi \in]0,x[$ (ou $]x,0[$ si $x < 0$))
   Total ii. : 7 pts

iii. On a

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

Utilisant le résultat précédent en $x = -1/4 \in \mathtt{I}$, on a

Relation entre $\cos\pi/6$ et la fonction étudiée : 1 pt

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \mathcal{P}_2\left(-\frac{1}{4}\right) + \mathcal{R}_2\left(-\frac{1}{4}\right)$$

où

$$\mathcal{P}_2\left(-\frac{1}{4}\right) = \left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right]_{-\frac{1}{4}} = \frac{111}{128}$$

et

Valeur approchée : 1 pt

$$\mathcal{R}_2\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16}\right)\left[\frac{x^3}{(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}}\right]_{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{1024}\right)\frac{-1}{\left(1-\frac{\theta}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in]0,1[$$

On a donc

Calcul de l'erreur : 1 pt

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \left(\frac{1}{1024}\right)\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} \simeq 0.002$$

On en conclut que $111/128$ constitue une approximation rationnelle de $\cos(\pi/6)$ avec une erreur inférieure à 0.01.

Total iii. : 3 pts

iv. Puisque $f(x) = \sqrt{1+x} \in C_3([0,x])$ (ou $C_3([x,0])$ si $x<0$), on a

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(\theta x) = O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

et

Hypothèse correcte : 1 pt

$$f(x) = \sqrt{1+x} = \mathcal{P}_2(x) + O(x^3) = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+O(x^3), \qquad (x\to 0) \qquad (\spadesuit)$$

Total iv. : 1 pt

v. Pour tout $y>0$, on a

$$\sqrt{y^2+y} = y\sqrt{1+\frac{1}{y}}$$

Posant $x = 1/y$ dans ($\spadesuit$), il vient ensuite

$$\sqrt{1+\frac{1}{y}} = 1+\frac{1}{2y}-\frac{1}{8y^2}+O\left(\frac{1}{y^3}\right), \qquad y \to +\infty$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2+y} &= y\left[1+\frac{1}{2y}-\frac{1}{8y^2}+O\left(\frac{1}{y^3}\right)\right] = y+\frac{1}{2}-\frac{1}{8y}+O\left(\frac{1}{y^2}\right) \\ &= g(y)+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\end{aligned} \qquad (y\to+\infty)$$

où

Total v. : 2 pts

$$g(y) = y+\frac{1}{2}-\frac{1}{8y}$$

TOTAL QIII : 16 PTS

Commentaires et erreurs les plus fréquentes

Rappelons qu'une réponse ne doit pas se résumer à une suite d'expressions mathématiques. Il est indispensable d'expliquer "en français" ce que l'on fait et pourquoi on le fait afin de démontrer sa compréhension de la matière.

Question I

- Pour déterminer la tangente à la courbe au point considéré, il fallait commencer par vérifier que le point donné était bien un point de la courbe.
- Les règles de dérivation ne devraient plus poser de problème. On constate pourtant de nombreuses erreurs de calcul, parfois grossières. Rappelons en particulier que la dérivée d'un produit n'est pas égale au produit des dérivées !
- La dérivation par rapport à x devait être menée ici de façon implicite car il était manifestement impossible d'obtenir l'expression explicite de $y(x)$. Dans ce cadre, il convient de considérer que $f(y) = f(y(x))$ et que la dérivée de f par rapport à x doit être calculée en utilisant la technique de dérivation des fonctions composées.

Question II

Si on peut parfois se permettre d'alléger quelque peu les écritures et justifications dans le cadre d'applications pratiques de concepts, le contexte permettant alors d'interpréter de façon non ambiguë les éléments non précisés, il convient par contre d'être particulièrement soigneux et rigoureux lorsqu'on mène un développement théorique ou abstrait comme celui qui était demandé.

- L'interprétation des notations o et O en termes de limites, si elle est la plus fréquente, n'est pas la plus générale. Si on mène un raisonnement à partir de cette interprétation, il convient donc de préciser les hypothèses permettant d'utiliser celle–ci (*i.e.* l'existence d'un voisinage dans lequel la fonction apparaissant au dénominateur ne s'annule pas).
- Quand on exprime un comportement asymptotique, il faut préciser systématiquement dans quel voisinage on considère les fonctions en faisant apparaître l'expression $(x \to x_0)$ appropriée.

Une propriété générale comme celle qui était énoncée ne peut être démontrée en utilisant un ou plusieurs cas particuliers. S'il est constructif d'envisager de tels cas particuliers pour bien comprendre le sens d'une proposition ou d'un concept, ceux-ci ne se substituent pas à une démonstration générale. En particulier, il était ici insuffisant de ne considérer que des fonctions f et g polynomiales.

Au-delà de ces imprécisions, on relève quelques problèmes d'interprétation ou de maîtrise des concepts.

- La relation $f = O(g)$ pour $(x \to x_0)$ n'implique pas que $|f(x)| \leq |g(x)|$ au voisinage de x_0 mais bien (pour autant que g ne s'annule pas) qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ dans un voisinage de x_0.
  On notera par exemple que $x = O(x/2)$ pour $x \to 0$.

- De $f = o(g)$, $x \to x_0$, on ne peut déduire que $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

  On sait par exemple que $\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, $(x \to 0)$. Cependant, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \neq 0$.

- De $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, on ne peut déduire que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  Par exemple,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{alors que } \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

- La limite d'un quotient n'est égale au quotient des limites que si les limites du numérateur et du dénominateur existent toutes deux et que la limite du dénominateur diffère de zéro.

Question III

i. Il ne faut pas confondre l'intervalle $\mathtt{I}$ demandé, c'est-à-dire celui dans lequel on peut prendre la variable x, avec les intervalles ouvert $]0,x[$ (ou $]x,0[$) et fermé $[0,x]$ (ou $[x,0]$) où les hypothèses de la formule de Taylor doivent être vérifiées.

ii. Il fallait donner l'expression du reste et ne pas se contenter d'écrire $\mathcal{R}_2(x)$. Dans le reste, la dérivée 3ème est évaluée en un point inconnu θx (ou ξ). Il est indispensable de préciser que $\theta \in]0,1[$ ($\xi \in]0,x[$ ou $]x,0[$).

iii.
- Il était demandé de trouver une valeur approchée de $\cos(\pi/6)$ en utilisant le résultat du point précédent. Toute autre méthode ne répondait donc pas à la question posée. Pour pouvoir utiliser le résultat du point précédent, il fallait déterminer la valeur de x permettant d'exprimer $\cos(\pi/6)$, c'est-à-dire le résultat irrationnel connu $\sqrt{3}/2$, au moyen de $\sqrt{1+x}$.
- Il ne fallait pas oublier de vérifier que le reste était inférieur en valeur absolue à l'erreur maximale imposée.