Université de Liège
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Octobre 2016

Analyse Mathématique
Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans l'aide des notes, sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures.

- *Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.*
- *Indiquez votre nom en* MAJUSCULES *dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.*
- *Les copies seront reprises lors du cours théorique du* ***4 novembre****.*

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

i. En utilisant la définition de la fonction arcsh comme réciproque de la fonction sh, déterminez l'expression de la dérivée de la fonction arcsh.
Précisez l'ensemble sur lequel la fonction arcsh est dérivable (domaine de dérivabilité).

ii. Déterminez le polynôme $\mathcal{P}_4(x)$ de degré inférieur ou égal à 4 tel que

$$\operatorname{arcsh} x = \mathcal{P}_4(x) + O(x^5), \qquad (x \to 0)$$

iii. Exploitez ce résultat pour calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsh} x - x\cos x}{x^3}$$

Question II

i. Si $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ pour $x \to 0$, peut-on en déduire que $\lim_{x\to 0}\left[f(x) - \frac{1}{x^2}\right] = 0$? Justifiez.

ii. Montrez que $x^2 \sin(1/x^3) = O(x^2)$ pour $x \to 0$.

iii. Sachant que

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + O(x^3), & (x \to 0) \\ g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + O(x^3), & (x \to 0) \end{cases}$$

(où α_1 et β_0 diffèrent de zéro), exprimez les coefficients γ_0, γ_1 et γ_2 en fonction de α_1, α_2, β_0, β_1 et β_2 tels que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

iv. Soit $f \in C_\infty(\mathbb{R})$ une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ et

$$g = f + \frac{1}{f}$$

Déterminez si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses et justifiez.

(a) Si f est stationnaire en $x_\star$ alors g est stationnaire en $x_\star$.

(b) Si f présente un maximum local en $x_\star$ alors g présente un maximum local en $x_\star$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La fonction sh vérifie les hypothèses du théorème des fonctions réciproques sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est réelle et que

- $\mathrm{sh} \in C_1(\mathbb{R})$,
- $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

Hypothèses : 2 pts

On note en outre que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction sh est $\mathbb{R}$ lui-même. Dès lors, la fonction réciproque arcsh est définie et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

Image de $\mathbb{R}$: 1 pt

Calcul de la dérivée : 3 pts (dont 1 pt pour le principe général)

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{arcsh}\,x = \left.\frac{1}{\frac{d}{dy}\,\mathrm{sh}\,y}\right|_{y=\mathrm{arcsh}\,x} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\mathrm{arcsh}\,x} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\mathrm{arcsh}\,x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(où on a tenu compte du fait que la fonction ch est positive). Cette expression de la dérivée est valable sur $\mathbb{R}$. Tenant compte de la forme de la dérivée, on peut même affirmer que $\mathrm{arcsh} \in C_\infty(\mathbb{R})$

Domaine de dérivabilité : 1 pt

Pas de point associé à C_∞

<u>Total i. : 7 pts</u>

ii. La fonction $f = \mathrm{arcsh}$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à un ordre quelconque. En particulier, puisque $\mathrm{arcsh} \in C_5(\mathbb{R})$, on sait que le polynôme de MacLaurin d'ordre quatre

Justification des hypothèses (C_5 ou C_∞) : 2 pts

Connaissance générale de la formule de Taylor/Mac Laurin : 1 pt

$$\mathcal{P}_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4$$

est tel que

$$\mathrm{arcsh}\,x = \mathcal{P}_4(x) + O(x^5), \qquad (x \to 0)$$

comme demandé.

La fonction arcsh étant impaire, on sait par ailleurs que $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$. On calcule successivement

$f'(x)$ et $f'(0)$: 1 pt

$f''(x)$ et $f''(0)$: 1 pt

$f^{(3)}(x)$ et $f^{(3)}(0)$: 1 pt

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -x(1+x^2)^{-3/2} & f''(0) &= 0\\
f^{(3)}(x) &= -(1+x^2)^{-3/2} + 3x^2(1+x^2)^{-5/2} & f^{(3)}(0) &= -1
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\mathcal{P}_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Expression de $\mathcal{P}_4(x)$: 1 pt

<u>Total ii. : 7 pts</u>

iii. En exploitant les résultats

$$\begin{cases}
\mathrm{arcsh}\,x = x - \dfrac{x^3}{6} + O(x^5), & (x \to 0)\\
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^4), & (x \to 0)
\end{cases}$$

Développement de cos : 1 pt

il vient

Comportement de la fonction : 1 pt

$$\frac{\operatorname{arcsh} x - x\cos x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)}{x^3}$$
$$= \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^5)}{x^3} = \frac{1}{3} + O(x^2), \qquad (x \to 0)$$

Dès lors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsh} x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

Valeur de la limite : 2 pts

Total iii : 4 pts

(max 2 pts si calcul de la limite sans utiliser Taylor)

TOTAL QI : 18 PTS

Question II

i. NON, comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

telle que

$$f(x) \sim \frac{1}{x^2}, \qquad (x \to 0) \qquad \text{mais} \qquad \lim_{x\to 0}\left[f(x) - \frac{1}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Contre-exemple correct : 1 pt

Vérification de l'hypothèse et négation de la thèse : 2 pts

Total i. : 3 pts

(Réponse correcte sans justification = 0 pt)

ii. Puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \nexists$$

la définition de O en termes de limite n'est pas applicable. On doit dès lors appliquer la définition de base, *i.e.*

$$f(x) = O[g(x)], \qquad (x \to x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$

Connaissance de la définition générale de O : 1 pt

Pour tout x pour lequel la fonction considérée est définie, on a

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| \leq x^2$$

qui correspond à l'inégalité attendue par la définition ci-dessus pour $C = 1$. Dès lors,

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = O(x^2), \qquad (x \to 0)$$

Justification par application de la définition : 2 pts (Le comportement pour $x = 0$ ne doit pas être discuté.)

Total ii. : 3 pts

iii. De

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + O(x^3), \qquad (x \to 0)$$

on peut déduire

$$f(x) = \left[\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + O(x^3)\right]\ g(x)$$

d'où, en tenant compte des expressions données pour $f(x)$ et $g(x)$,

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + O(x^3) = \left[\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + O(x^3)\right] \; \left[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + O(x^3)\right]$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, il vient

Valeurs des coefficients : 3 pts

$$0 = \gamma_0 \beta_0 \tag{$\flat$}$$

$$\alpha_1 = \gamma_0 \beta_1 + \gamma_1 \beta_0 \tag{$\sharp$}$$

$$\alpha_2 = \gamma_0 \beta_2 + \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_0 \tag{$\natural$}$$

De ($\flat$), nous déduisons $\gamma_0 = 0$ puisque $\beta_0 \neq 0$. De ($\sharp$), $\gamma_1 = \alpha_1/\beta_0$ et enfin, de ($\natural$),

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_2 \beta_0 - \alpha_1 \beta_1}{\beta_0^2}$$

Total iii. : 3 pts

iv. (a) Soit la fonction

$$g = f + \frac{1}{f}$$

On calcule facilement

Valeur de g' : 1 pt

$$g' = f' - \frac{f'}{f^2} = f' \left(\frac{f^2 - 1}{f^2} \right) \tag{$\flat\flat$}$$

de sorte que, si f est stationnaire en $x_\star$, c'est-à-dire si $f'(x_\star) = 0$, on a aussi $g'(x_\star) = 0$.

Stationnaire = dérivée nulle : 1 pt

La proposition est donc vraie, la fonction g est bien stationnaire en $x_\star$.

Conclusion : 1 pt

Total (a) : 3 pts

(b) Si f présente un maximum en $x_\star$, alors f est croissante à gauche de $x_\star$ et décroissante à droite, *i.e.* $f'(x) \geq 0$ pour $x < x_\star$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x > x_\star$. La relation ($\flat\flat$) montre que le signe de g' est l'opposé de celui de f' si $f^2 < 1$. La fonction g présente donc un minimum local en $x_\star$ si $f^2 < 1$ au voisinage de $x_\star$ puisque g' est alors négative à gauche de $x_\star$ et positive à droite, *i.e.* g est décroissante pour $x < x_\star$ et croissante pour $x > x_\star$.

La proposition peut donc être invalidée par la production d'un contre-exemple tel que est $f^2(x_\star) < 1$. Considérons à cet effet, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$$

qui est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive et qui présente un maximum en $x_\star = 0$. On a

Contre-exemple dûment justifié (avec ou sans discussion générale sur f'/g') : 3 pts.

$$g(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} + 2(1+x^2)$$

$$g'(x) = x \left[4 - \frac{1}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{4x^4 + 8x^2 + 3}{(1+x^2)^2} x$$

soit

Le raisonnement général basé sur g' ou $g''(x_\star)$ (voir plus loin) sans fournir de contre-exemple rapporte 2 pts sur 3.

x		0	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction g présente donc un minimum en $x_\star$. La proposition est donc fausse.

De façon alternative, on peut orienter la recherche d'un contre-exemple en considérant le signe de $g''(x_\star)$. On a

$$g'' = f'' - \frac{f''f^2 - 2f'^2 f}{f^4} = f'' - \frac{f''f - 2f'^2}{f^3}$$

Si $f \in C_\infty$ présente un maximum en $x_\star$, elle est stationnaire en ce point, *i.e.* $f'(x_\star) = 0$, et

$$g''(x_\star) = f''(x_\star) - \frac{f''(x_\star) f(x_\star)}{f^3(x_\star)} = \frac{f''(x_\star)(f^2(x_\star) - 1)}{f^2(x_\star)} \tag{†}$$

Si f présente un maximum en $x_\star$ avec $f''(x_\star) < 0$ et si $f^2(x_\star) < 1$, alors g est stationnaire en $x_\star$ et telle que $g''(x_\star) > 0$, *i.e.* g présente un minimum local en $x_\star$.

Total (b) : 3 pts

Total iv. : 6 pts

TOTAL QII : 15 PTS

Question I

Cette première question consistait principalement en une application des résultats théoriques concernant, d'une part, l'existence et la dérivation des fonctions réciproques et, d'autre part, la formule de Taylor. Afin de pouvoir appliquer correctement ces résultats, il est indispensable d'en vérifier les hypothèses. Toutes les questions d'Analyse comportent toujours une part de justifications théoriques qu'il ne faut pas esquiver.

i.
- Comme rappelé ci-dessus, la vérification des hypothèses du théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques est indispensable pour pouvoir en utiliser le résultat.
- Tout énoncé doit être lu correctement et jusqu'au bout. Cependant,
  - ✓ on constate que de nombreux étudiants étudient la fonction arcsin et non la fonction arcsh comme demandé ;
  - ✓ alors qu'il était clairement demandé d'utiliser la définition de la fonction arcsh comme réciproque de la fonction sh, on observe que de nombreux étudiant partent de l'expression de la fonction arcsh en fonction du logarithme.

    Lorsque la méthode de résolution est imposée dans l'énoncé, l'étudiant qui utilise une approche différente ne répond pas formellement à la question posée et est donc sanctionné, même si la réponse finale est correcte.
  - ✓ alors qu'il était explicitement demandé de déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction arcsh, *i.e.* le sous-ensemble du domaine de définition où la fonction dérivée peut être définie, de nombreux étudiants oublient de fournir cette information.

ii.
- Comme rappelé ci-dessus, la vérification des hypothèses de la formule de Taylor est indispensable pour pouvoir en utiliser le résultat.
- Le calcul des dérivées ne devrait plus poser de problème. La connaissance des formules de dérivation est une base essentielle des cours d'ingénieurs. Des erreurs dans le calcul des dérivées sont impardonnables et pourtant très nombreuses dans les copies corrigées (faute de signe, méconnaissance de la formule de dérivation d'un quotient, ...).
- Réfléchir un peu permet souvent d'éviter de longs calculs inutiles. La fonction arcsh étant impaire, seules les puissances impaires interviennent dans son polynôme de Mac Laurin. Il était donc inutile de calculer la dérivée quatrième, forcément nulle en zéro.
- L'utilisation des notations correctes est révélatrice d'une bonne compréhension des concepts utilisés. Dans l'expression de la formule de Taylor, les symboles o et O ne sont pas interchangeables et doivent être employés à bon escient. De plus, chaque fois que les symboles o, O ou $\sim$ sont utilisés, il convient de préciser dans quel voisinage on se place, soit ici $(x \to 0)$.

iii. Ici aussi, il fallait répondre à la question posée, à savoir utiliser le résultat du point ii. pour calculer la limite. L'utilisation du théorème de l'Hospital ne répondait que partiellement à la question posée.

Question II

i.
- Rappelons quelques principes évidents de démonstration.
  - ✓ Donner un exemple qui vérifie les hypothèses et la thèse ne démontre rien. Une démonstration générale rigoureuse est toujours nécessaire pour justifier qu'un énoncé est vrai.
  - ✓ Pour démontrer qu'un énoncé est faux, il suffit par contre de trouver un contre-exemple. Il est alors indispensable de montrer que cet exemple remplit les hypothèses et nie la thèse.
  - ✓ Expliquer intuitivement que l'énoncé doit être faux ne démontre rien : le contre-exemple est indispensable.

- Le calcul des limites ne semble pas encore maîtrisé par de nombreux étudiants. Les limites ne se manipulent comme des nombres que si elles existent et sont finies. On notera par exemple les éléments suivants.
  - ✓ $+\infty-\infty$ est une forme indéterminée dont la valeur n'est pas nécessairement nulle.
  - ✓ La limite d'un quotient n'est égale au quotient des limites que si les limites existent et sont finies. Sans cette hypothèse, on ne peut donc pas écrire

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

    Considérons par exemple la fonction $f(x)=1/x$. On a bien

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

    et pourtant

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0\neq 1$$

  - ✓ La limite d'une somme n'est égale à la somme des limites que si les limites existent et sont finies. Sans cette hypothèse, on ne peut donc pas écrire

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

    Considérons par exemple la fonction $f(x)=1/x$. On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

    et pourtant

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}=\infty$$

ii. Puisque

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \nexists\,,$$

la vérification du comportement en O par un calcul de limite n'est pas réalisable. En particulier, on ne peut pas écrire que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\in[-1,1]$$

Il était ici indispensable d'utiliser la définition la plus générale de O.
Remarquons qu'il n'est pas non plus possible d'utiliser la formule de Mac Laurin pour obtenir le comportement de la fonction $x^2\sin(1/x^3)$ dans le voisinage de zéro puisqu'elle n'y est pas définie.

iii.
- Les valeurs recherchées des coefficients γ_i sont des constantes, elles ne peuvent pas dépendre de la variable x.
- L'hypothèse $\beta_0\neq 0$ était nécessaire pour répondre à la question. Il ne fallait pas oublier d'y faire référence à l'endroit où elle apparaissait. L'hypothèse énoncée sur α_1 n'était par contre pas utile au raisonnement.

iv.
- Comme à la question I, le calcul des dérivées est problématique.
- Une fonction est stationnaire en un point si sa dérivée première s'annule en ce point. Ceci n'entraîne pas que toutes les dérivées d'ordre supérieur sont nulles en ce point. Il ne faut pas confondre la fonction et sa valeur. Quand on calcule une dérivée en un point, on dérive la fonction en ce point, pas sa valeur.
- Identifier les propriétés des fonctions f qui permettent d'invalider un énoncé ne suffit pas à démontrer que celui-ci est faux. Encore faut-il prouver qu'il existe au moins une fonction possédant ces propriétés ou, plus simplement, trouver un exemple d'une telle fonction.